

PREMIÈRE PARTIE

Les seiches longitudinales.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

§ 1. ONDES DE MARÉE, ONDES DE SURFACE.

Le phénomène des seiches appartient à la catégorie des ondes liquides dites « de marée » (les « tidal waves » des auteurs de langue anglaise). La caractéristique de ce type d'ondes réside dans le fait que le mouvement du liquide y est principalement horizontal et que les déplacements sont sensiblement les mêmes pour toutes les particules situées sur la même verticale.

Ceci revient, dans les équations de l'hydrodynamique (cf. § 2), à négliger devant la pression hydrostatique la légère variation de pression due à l'accélération verticale des particules fluides. Ceci est légitime, étant donné la lenteur des oscillations étudiées, mais suppose essentiellement que la profondeur du bassin considéré soit suffisamment faible devant les dimensions horizontales de celui-ci pour que les couches profondes de la masse participent au mouvement horizontal dans la même mesure que les couches superficielles. Lorsque ce type de mouvement a lieu dans un bassin de profondeur constante et suivant une seule dimension horizontale, cette hypothèse simplificatrice est désignée couramment sous le nom d'« hypothèse du parallélisme des tranches liquides »; dans ce cas, en effet, tout se passe comme si le liquide se déplaçait par tranches planes, toutes perpendiculaires à la direction du mouvement, les dénivellations verticales résultant simplement de l'aplatissement ou de la dilatation des tranches : les parois extrêmes sont supposées verticales et la masse (ainsi que la densité) de l'eau en oscillation sont évidemment invariables.

Si la profondeur cesse d'être constante, l'hypothèse du parallélisme des tranches tombe en défaut; nous verrons (cf. § 3) qu'on peut cependant continuer à l'utiliser comme une approximation commode, à condition que la profondeur ne varie que *l e n t e m e n t* le long de l'axe où a lieu le mouvement d'oscillation à l'échelle de la longueur d'onde de la seiche.

Lorsque l'accélération verticale ne peut plus être négligée dans les équations de l'hydrodynamique, on obtient la catégorie des ondes liquides dites « de surface » (les « surface waves » des auteurs de langue anglaise), dont un cas important est celui des oscillations libres en eau « profonde », c'est-à-dire de profondeur non négligeable devant les dimensions horizontales du bassin (plus exactement : devant la longueur d'onde des oscillations considérées). Au lieu de se mouvoir par tranches parallèles, l'eau est maintenant le siège d'une agitation dont l'amplitude diminue à mesure qu'on descend de la surface libre vers le fond; ces oscillations sont aussi beaucoup plus rapides que dans le cas des « ondes de marée ».

Il va de soi qu'il n'y a pas de frontière nette entre ces deux types d'ondes liquides; dans nombre de cas intermédiaires, on pourra les rattacher à l'une ou à l'autre catégorie, suivant le degré de rigueur avec lequel on désire analyser les phénomènes.

§ 2. LES ÉQUATIONS D'EULER DE L'HYDRODYNAMIQUE.

Voici, pour rappel, les équations d'EULER; leur démonstration est trop connue pour être reprise ici. Notations : $v_x v_y v_z$: composantes (parallèles aux axes $Ox Oy Oz$ respectivement) de la vitesse au point x, y, z à l'instant t ⁽¹⁸⁾; X, Y, Z : composantes (même remarque) des forces extérieures par unité de masse; p : pression; ρ : densité du liquide; τ : température absolue. Rappelons encore que le mouvement est supposé « continu » (i.e. $v_x v_y v_z$ sont des fonctions continues de x, y, z ; elles sont partout finies, de même que leurs dérivées $\frac{\partial v_x}{\partial x}, \frac{\partial v_y}{\partial x}, \frac{\partial v_z}{\partial x}, \frac{\partial v_x}{\partial y}, \dots$, etc.).

Équations du mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \\ \frac{\partial v_y}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_y}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y}, \\ \frac{\partial v_z}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z}. \end{aligned}$$

Équation de continuité :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial (\rho v_z)}{\partial z} = 0.$$

A ces quatre équations il faut encore ajouter l'équation caractéristique du liquide, relation entre p, ρ, τ : $F(p, \rho, \tau) = 0$, ou $\rho = f(p, \tau)$. Seulement, comme dans les problèmes

⁽¹⁸⁾ Ces grandeurs sont habituellement représentées par u, v, w dans les ouvrages classiques. Pour des raisons pratiques, on a préféré réserver ces trois derniers symboles pour désigner d'autres grandeurs qui interviennent constamment dans les calculs des chapitres qui suivent.

qui nous occupent, les liquides sont traités comme incompressibles, et que l'on ne tient pas compte des variations de température dans l'étude des seiches, l'équation caractéristique se réduit à $\rho = \text{const.}$, ce qui permet immédiatement de simplifier l'équation de continuité, et de l'écrire : $\text{div} (v_x v_y v_z) = 0$.

§ 3. L'HYPOTHÈSE DU PARALLÉLISME DES TRANCHES LIQUIDES.

Commençons par examiner le cas le plus simple, celui des « ondes de marée » à une seule dimension horizontale, dans un canal de largeur et de profondeur (h_0) constantes et à parois verticales. Dans un tel canal, la section droite, c'est-à-dire le polygone dont les côtés sont les intersections d'un plan perpendiculaire à l'axe avec les parois et le fond du canal et avec la surface libre de l'eau, est évidemment un rectangle de dimensions constantes. Soit Ox l'axe parallèle à la longueur du canal; l'axe Oz est vertical et dirigé vers le haut; la surface libre est un plan d'équation $z = h_0$, et le fond un plan d'équation $z = 0$; la dénivellation est mesurée par ζ . Négliger l'accélération verticale des particules fluides revient évidemment à prendre la pression au point (x, z) égale à la pression hydrostatique due à la colonne de liquide de hauteur $h_0 + \zeta - z$, augmentée de la pression extérieure p_0 (supposée constante et uniforme à la surface libre : condition de Poisson). On a ainsi : $p = p_0 + \rho g (h_0 + \zeta - z)$. Par suite $\frac{\partial p}{\partial x} = \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$.

L'équation du mouvement s'écrit alors :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = X - g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

de sorte que l'accélération horizontale, $\partial v_x / \partial t$, étant indépendante de z , est la même pour toutes les particules situées dans un plan d'équation $x = Cte$; ou, ce qui revient au même, la vitesse horizontale v_x dépend seulement de x et de t . C'est là l'expression mathématique de l'hypothèse du parallélisme des tranches. En l'absence de forces extérieures ($X=0$), et en ne considérant que des mouvements d'amplitude infiniment petite, on peut encore simplifier davantage l'équation du mouvement, qui se réduit ainsi à :

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

Posons encore

$$\xi = \int v_x dt,$$

ξ étant le déplacement de la tranche liquide parallèlement à l'axe Ox ; si les mouvements sont petits, on peut écrire pour l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (I.1)$$

L'équation de continuité à deux dimensions s'écrit (ρ étant constant, condition désormais sous-entendue) :

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0.$$

L'origine des z étant sur le fond du canal, on en tire

$$v_z = - \int_0^z \frac{\partial v_x}{\partial x} dz = - z \frac{\partial v_x}{\partial x},$$

ce qui montre que la vitesse verticale d'une particule liquide est proportionnelle à sa distance au fond du canal. A la surface on a

$$z = h_0 + \zeta, \quad v_z = \frac{\partial \zeta}{\partial t},$$

d'où

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - (h_0 + \zeta) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \xi}{\partial t} \right),$$

ou, en négligeant le produit

$$\zeta \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x}$$

comme petit du second ordre :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - h_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial t \partial x},$$

ou, en intégrant par rapport à t :

$$\zeta = - h_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}. \quad (I.2)$$

Éliminant ζ ou ξ entre ces deux équations, on obtient respectivement :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \quad (I.3)$$

ou

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = g h_0 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2}, \quad (I.4)$$

équations de type bien connu en physique mathématique.

G. B. AIRY ⁽¹⁹⁾ arrive à l'équation (I.3) d'une manière un peu différente. Écrivant qu'il y a égalité entre le volume $h_0 dx$ d'une tranche liquide avant son déplacement (la largeur est constante et égale à l'unité de longueur) et son volume

$$(h_0 + \zeta) \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx$$

⁽¹⁹⁾ AIRY, G. B., *Tides and Waves*, Encycl. Metrop., V, pp. 293 sqq.

après un déplacement ξ , il obtient l'équation de continuité sous la forme :

$$h_0 + \zeta = \frac{h_0}{1 + \partial\xi/\partial x}. \quad (\text{I.5})$$

L'équation du mouvement est obtenue en écrivant que l'accélération horizontale de la tranche au point $x + \xi$, soit

$$\frac{\partial^2 (\xi + x)}{\partial t^2},$$

est due à la différence de pression sur les deux faces de celle-ci, différence de pression égale à

$$- \rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx,$$

ou, par unité de masse,

$$- g \frac{\partial \zeta}{\partial x} / \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)$$

On a ainsi

$$\frac{\partial^2 (x + \xi)}{\partial t^2} = - g \cdot \frac{1}{1 + \partial\xi/\partial x} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} \quad (\text{I.6})$$

ou, en éliminant ζ à l'aide de (I.5), et remarquant que x est indépendant du temps :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = g h_0 \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^{-3} \cdot \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}. \quad (\text{I.7})$$

En développant la parenthèse en série de puissances de $\partial\xi/\partial x$ et en ne retenant que le premier terme, on retrouve immédiatement (I.3). G. B. AIRY envisage pour (I.7) des solutions en première, en seconde et même en troisième approximation ⁽²⁰⁾.

Les résultats ci-dessus restent valables (rigoureusement) pour un canal de section non plus rectangulaire, mais quelconque, étant entendu que sa forme et son aire soient constantes en x . Si S désigne l'aire de cette section droite et b la largeur du canal à la surface libre, l'équation de continuité reste inchangée, pourvu que h désigne maintenant S/b , c'est-à-dire la profondeur moyenne du canal; quant à l'équation du mouvement, elle n'est pas modifiée non plus puisqu'elle ne contient pas b .

Passons maintenant au cas de la section droite variable et montrons que l'hypothèse du parallélisme des tranches peut être conservée pourvu que $S(x + \xi)$ ne diffère guère de $S(x)$, condition pratiquement toujours réalisée pour les lacs réels : en effet, comme nous le verrons plus loin (cf. calculs numériques, chap. III-V); les déplacements ξ ne représentent le plus souvent guère plus de quelques dix-millièmes de la longueur totale du lac (tout au plus un ou deux millièmes dans le cas de seiches d'amplitude exceptionnelle), et il est natu-

⁽²⁰⁾ Id., *ibid.*, pp. 294 sqq.

rellement très rare que $S(x)$ varie de manière appréciable pour d'aussi faibles écarts relatifs en x . Considérons donc une section transversale, d'aire $S(x)$ et de largeur à la surface libre $b(x)$; le volume d'une tranche liquide d'épaisseur dx sera $S(x) \cdot dx$. Après un temps t , la tranche s'est déplacée pour venir au point $x + \xi$, et son épaisseur est devenue

$$\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx,$$

de sorte que son volume peut s'écrire

$$S(x + \xi) \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot dx.$$

Supposons encore que ζ conserve la même valeur sur toute la largeur de la tranche; cela revient à admettre qu'il n'y a pas d'écoulement transversal et que toutes les particules d'eau situées dans le même plan transversal possèdent la même vitesse parallèlement au plan Oxz ; cette condition est habituellement vérifiée, sauf dans le cas d'un lac dont les rives sont en pente très douce, et même alors l'exception n'a lieu qu'au voisinage immédiat de ces rives (« shelving effect »). Dans ces conditions, la partie de la tranche située au-dessus du niveau de la surface libre a pour volume

$$b(x) \cdot \zeta \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot dx$$

[en admettant que l'on puisse confondre $b(x + \xi)$ avec $b(x)$, ce qui est évidemment légitime étant donné l'hypothèse analogue sur $S(x + \xi)$].

Écrivons que la tranche liquide conserve son volume, au cours du déplacement :

$$S(x) dx = [S(x + \xi) + b(x) \cdot \zeta] \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx,$$

d'où

$$b(x) \cdot \zeta = \frac{S(x)}{1 + \partial \xi / \partial x} - S(x + \xi)$$

ou, en développant en séries de puissances et en ne retenant que les premiers termes :

$$b(x) \cdot \zeta = S(x) \cdot \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) - S(x) - \xi \cdot \frac{\partial S}{\partial x} = -S(x) \cdot \frac{\partial \xi}{\partial x} - \xi \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$$

ou

$$\zeta = -\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} [S(x) \cdot \xi]. \quad (I.8)$$

Pour obtenir l'équation du mouvement, remarquons que la différence de pression sur les deux faces de la tranche (arrivée au point $x + \xi$) est simplement due à la différence de niveau $-d\zeta$ qui existe entre ces deux faces, et a donc

pour mesure $-\rho g d\zeta$ par unité de surface. L'équation du mouvement pour la tranche S considérée dans son entièreté s'écrit donc :

$$dx \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot \rho \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -\rho g \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \quad \text{ou} \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \cdot \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-1}$$

ou, en développant en série comme ci-dessus :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x} \left(1 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

Si nous négligeons encore $\partial \xi / \partial x$ devant 1, ce qui revient à supposer que les accroissements qui résultent pour S (aire de la section droite) de la dénivellation ζ ainsi que du déplacement de la tranche, soit respectivement

$$b(x) \cdot \zeta \quad \text{et} \quad \xi \cdot \frac{\partial S}{\partial x}$$

sont très faibles par rapport à S lui-même (ce qui est assuré puisque la profondeur et la largeur ne varient guère du point x au point $x + \xi$), il reste, pour l'équation du mouvement :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}. \quad (\text{I.9})$$

§ 4. L'ÉQUATION DE CHRYSTAL ⁽²¹⁾.

Éliminons ζ entre les équations (I.8) et (I.9); il vient, après multiplication par $S(x)$, quantité indépendante du temps :

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} [S(x) \cdot \xi] = g \cdot S(x) \cdot b(x) \cdot \frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} (S \cdot \xi) \right].$$

Changeons maintenant de variables en posant :

$$u = S \cdot \xi, \quad v = \int_0^x b(x) dx.$$

La signification physique de ces nouvelles variables est claire : u représente le volume d'eau balayé par la tranche liquide $S(x)$ au cours de son déplacement ξ , et v n'est autre que l'aire de la surface libre du lac mesurée depuis l'une des extrémités prise comme origine. Posons encore $S(x) \cdot b(x) = \sigma(v)$. L'équation de continuité devient alors $\zeta = -\frac{\partial u}{\partial v}$ et l'équation aux seiches : $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = g \sigma(v) \frac{\partial^2 u}{\partial v^2}$.

⁽²¹⁾ Cf. CHRYSTAL, G., *On the Hydrodynamical Theory of Seiches*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 41 (1904), pp. 613 sqq.

Le mouvement étant périodique, on a

$$\xi \sim e^{i\omega t} \quad (\omega = 2\pi/T),$$

et par suite

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\omega^2 u(v).$$

Il vient ainsi, en posant $\omega^2/g = \lambda$:

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0. \quad (\text{I.10})$$

L'introduction des variables u et v , et de la nouvelle équation (I.10) est due à G. CHRYSTAL; aussi l'équation (I.10) est-elle habituellement désignée de ce nom. La courbe d'abscisse v et d'ordonnée $\sigma(v)$ est appelée par cet auteur « courbe normale » du lac; il est clair que dans le cas du lac de largeur b constante et de profondeur variable $h(x)$, cette courbe n'est autre que le profil du fond lui-même : à des facteurs constants près, v se confond alors avec x et $S(x)$ avec $h(x)$. Pour résoudre l'équation de CHRYSTAL (I.10), il reste à soumettre $u(v)$ à deux conditions-frontière résultant des conditions physiques du problème.

Si le lac est borné en $v = 0$ et en $v = a$ (en appelant a l'aire totale de la surface libre du lac) par des murs verticaux, on devra avoir $\xi(0) = \xi(a) = 0$ ou (idem) $u(0) = u(a) = 0$; ceci exprime qu'il n'y a pas de déplacement des tranches liquides aux extrémités du lac. D'autre part, l'équation de CHRYSTAL montre que ces conditions-frontière sont équivalentes à

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)_{v=0} = \left(\frac{\partial \zeta}{\partial v}\right)_{v=a} = 0;$$

on en conclut que les seiches possèdent des ventres aux extrémités du lac. Si au contraire les parois sont inclinées aux extrémités du lac, les conditions-frontière devront exprimer que le mouvement de l'eau y a lieu tangentiellement au fond, et l'on aura :

$$\zeta = -\frac{dh}{dx} \cdot \xi \quad \text{en } x = 0 \quad \text{et en } x = l,$$

ou encore, en observant que $\lambda \xi = \frac{d\zeta}{dx}$ (cf. I.9) :

$$\lambda \zeta(0) + h'(0) \zeta'(0) = \lambda \zeta(l) + h'(l) \zeta'(l) = 0.$$

L'équation de CHRYSTAL peut aussi être interprétée comme l'équation du mouvement d'une corde de densité longitudinale variable, tendue horizontalement et vibrant dans un plan vertical. Le rapport tension/densité longitudinale est représenté par $g\sigma(v)$, à condition que les variations de densité longitudinale en des points « voisins » restent faibles devant cette densité elle-même, et que les élongations transversales soient suffisamment petites pour que l'angle aigu d'inclinaison que fait la corde en un point quelconque avec l'horizontale

puisse être confondu avec son sinus et sa tangente; v s'interprète maintenant comme la distance mesurée depuis l'une des extrémités le long de la corde au repos, et u comme l'élongation transversale; les conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$ signifient que les deux extrémités de la corde sont fixes. Enfin, les nœuds de la corde correspondent aux ventres de la seiche et vice versa.

Quant aux deux restrictions imposées ci-dessus, elles sont la traduction en termes de corde vibrante de l'hypothèse du parallélisme des tranches et de son corollaire, l'hypothèse de la faible amplitude des oscillations de l'eau.

Au lieu de la variable indépendante v de CHRYSTAL, on peut aussi introduire la variable s définie par l'égalité

$$s = \int_0^x \frac{dx}{S(x)} \quad \text{ou} \quad s = \int_0^v \frac{dv}{\sigma(v)};$$

contrairement à v (aire de la surface libre), cette variable s n'a pas de signification physique simple; néanmoins, elle reste aisément calculable ou, le cas échéant, mesurable sur une carte bathymétrique du lac. On a, en considérant σ comme une fonction de s , $dv = \sigma(s)ds$, et par suite

$$\zeta = -\frac{1}{\sigma(s)} \frac{du}{ds} \quad \text{ou} \quad u = -\int_0^s \zeta \sigma(s) ds,$$

d'où l'on déduit, pour l'équation modifiée de CHRYSTAL :

$$\frac{d\zeta}{ds} + \lambda \int \zeta \sigma(s) ds = 0,$$

ou, après dérivation,

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \lambda \sigma(s) \zeta = 0. \quad (\text{I.11})$$

Les conditions-frontière s'écrivent maintenant (dérivées par rapport à s) :

$$\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0, \quad \text{avec} \quad c = \int_0^a \frac{dv}{\sigma(v)}.$$

Du point de vue pratique, la variable indépendante s sera moins commode à manier que la variable v de CHRYSTAL; cela tient à ce que, dans les calculs numériques (tels qu'on les effectue par exemple dans la méthode de DEFANT, cf. pp. 56 sqq.), on tient avant tout compte de la signification physique de cette variable, qui n'est autre que l'aire de la surface libre du lac, aire aisément mesurable sur une carte : si au contraire on calculait $v = \int_0^x b(x) dx$ sous forme d'une somme $v = \Sigma b(x_i) \Delta x_i$, on aboutirait à de notables écarts, à moins de prendre un nombre prohibitif de divisions; des essais numériques effectués sur le lac Tanganika ont confirmé la chose. On peut cependant remédier à cet inconvénient en modifiant légèrement la définition de s . Pour cela, commençons par définir une largeur moyenne $\beta(x)$, telle que $v = \Sigma \beta(x_i) \Delta x_i = \int_0^x b(x) dx$ rigoureusement : il suffit de prendre $\beta(x_i) = \Delta v_i / \Delta x_i$; $\sigma(v)$ à son tour sera remplacé par $S(x) \beta(x) = \tau(v)$ (posé), de sorte que l'on obtiendra une nouvelle courbe normale (la courbe « corrigée »), qui et général différera peu de la précédente (cf. plus loin graphiques relatifs au Tanganika ne

au lac de Genève). Avec cette nouvelle courbe normale, l'accord sera évidemment rigoureux entre les résultats numériques obtenus à partir des deux équations (I.10) et (I.11).

Il reste à examiner ce que vaut cette courbe « corrigée » du point de vue théorique. Tout d'abord, il y a une inconséquence à mesurer $S(x)$ et $b(x)$ — c'est-à-dire ici $\beta(x)$ — en deux points différents, car le relevé de $S(x)$ lui-même n'est pas indépendant de la largeur du lac; et si à son tour $S(x)$ doit être corrigé (ce qui ne pourrait dans la pratique se faire que d'une manière plus ou moins arbitraire), le raisonnement physique sur lequel s'appuient plusieurs des méthodes approchées décrites au chapitre II perd un peu de sa rigueur. D'autre part, pour calculer $\beta(x)$, il faut diviser Δv , grandeur mesurable avec précision sur une carte, par Δx , grandeur mesurée sur le Talweg (ligne souvent mal définie) et par suite beaucoup moins sûre. L'erreur introduite ainsi pourra aisément être du même ordre de grandeur que celle commise en adoptant comme largeur effective la largeur mesurée directement sur la carte à l'endroit où l'on relève $S(x)$, autrement dit, que celle commise en prenant $v(x) = \sum b(x_i) \Delta x_i$, et en utilisant s défini à l'aide de $\sigma(v)$ et non de $\tau(v)$.

Il semble donc bien que l'on puisse s'attendre à une sorte de compensation et qu'en fin de compte les deux équations (I.10) et (I.11) doivent fournir des résultats également acceptables.

Une dernière transformation intéressante de l'équation de CHRYSTAL s'obtient comme suit. Prenons comme nouvelle variable indépendante la grandeur θ , définie par la relation

$$\theta = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}.$$

La signification physique de θ est aisée à apercevoir : θ représente la moitié du temps nécessaire à une onde progressive, se propageant avec une vitesse $\sqrt{gh(x)}$ (égale à celle de l'onde d'oscillation fondamentale, considérée comme une onde progressive sinusoïdale de longueur double de celle du lac et se réfléchissant alternativement aux deux extrémités) pour parcourir une distance x le long du Talweg, depuis l'extrémité-origine. L'équation de CHRYSTAL prend alors la forme

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \lambda \frac{b^2 gh}{\sigma} u = 0,$$

ou, puisque $\sigma = Sb = hb^2$ (h désignant la profondeur moyenne de la section droite, variant avec x)

$$\frac{d^2 u}{d\theta^2} + \omega^2 u = 0. \quad (\text{I.11}^{bis})$$

Sa solution peut se mettre sous la forme

$$u = U_0 e^{i\omega\theta},$$

ou, à cause des conditions-frontière ($u = 0$ aux extrémités du lac),

$$u = U_0 \sin \left(\omega \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}} \right)$$

ou encore

$$u = U_0 \sin \left(\omega \int_0^v \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}} \right).$$

Si l'on utilise ce dernier résultat pour trouver les valeurs propres de l'équation de CHRYSTAL, on posera, pour le fondamental :

$$\omega \int_0^a \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}} = \pi \quad \text{d'où} \quad T_1 = 2 \int_0^a \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}}, \quad \text{ou} \quad T_1 = 2 \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}},$$

et pour les modes supérieurs, à j nœuds :

$$T_j = \frac{2}{j} \int_0^a \frac{dv}{\sqrt{g\sigma(v)}} \quad \text{ou} \quad T_j = \frac{2}{j} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}.$$

Ces périodes ne sont autres que celles fournies par la formule de Du Boys (cf. pp. 9, 35 sqq.); le résultat est rigoureux pour le fondamental du lac à section rectangulaire constante ($b(x)$ et $h(x)$ constants), encore acceptable pour le fondamental d'un lac à section droite lentement variable à l'échelle de la longueur d'onde, mais médiocre pour les modes supérieurs (cf. loc. cit.).

La même variable θ permet d'étudier le comportement des fonctions u et ζ en fonction des grandeurs $b(x)$ et $h(x)$.

Entre l'équation du mouvement $\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$ et l'équation de continuité $\zeta = -\frac{1}{b(x)} \frac{\partial (S\xi)}{\partial x}$ on éliminera ζ ou ξ , suivant que l'on veut étudier la fonction u ou la fonction ζ .

a) Étude de la fonction u . — L'élimination de ζ entre les deux équations ci-dessus donne, après multiplication des deux membres par S :

$$\frac{\partial^2 (S\xi)}{\partial t^2} = gS \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{b(x)} \frac{\partial (S\xi)}{\partial x} \right].$$

Introduisons maintenant la variable θ : il vient

$$\frac{\partial^2 (S\xi)}{\partial t^2} = \frac{S}{\sqrt{h}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left[\frac{1}{b(\theta)} \frac{\partial}{\partial \theta} (S\xi) \right],$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{S}{h} \left[-\frac{b'}{b^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{h'}{h b} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{1}{b} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right]$$

ou

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = -\frac{b'}{b} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

(les accents servant à désigner les dérivés par rapport à θ), ou encore, sous forme plus condensée :

$$\sqrt{\sigma} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0.$$

Posons, afin de résoudre cette équation, $u = \Phi(\theta) \cdot F(\theta - t)$. Il vient immédiatement

$$2 \frac{\Phi'}{\Phi} \cdot \frac{F'}{F} + \frac{\Phi''}{\Phi} - \left(\frac{1}{2} \frac{h'}{h} + \frac{b'}{b} \right) \left(\frac{\Phi'}{\Phi} + \frac{F'}{F} \right) = 0.$$

Les termes en F'/F s'annulent si

$$2 \frac{\Phi'}{\Phi} - \frac{1}{2} \frac{h'}{h} - \frac{b'}{b} = 0,$$

c'est-à-dire si $\Phi = A b^{1/2} h^{1/4}$ ($A = \text{const.}$).

L'équation ci-dessus sera satisfaite si, en outre, Φ''/Φ et Φ'/Φ sont négligeables devant F'/F . La relation $\Phi = A b^{1/2} h^{1/4}$ montre que la seconde de ces deux conditions revient à négliger

$$\frac{1}{2} \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right)$$

devant u'/u , ou, puisque $\partial u / \partial x$ est de l'ordre de ζ / Λ ($\Lambda =$ longueur d'onde de l'oscillation), à négliger $\Lambda b'$ et $\Lambda h'$ devant b et h ; or, c'est là précisément ce qu'implique l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides : largeur et profondeur du lac lentement variables le long du Talweg à l'échelle de la longueur d'onde des oscillations considérées. La première condition implique la même restriction quant aux variations de b' et h' ⁽²²⁾.

b) Étude de la fonction ζ . — L'élimination de ξ entre les deux équations fournit de même, après introduction de la variable θ de GREEN,

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = \zeta'' + \left(\frac{b'}{b} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} \right) \zeta'$$

(les accents désignant à nouveau les dérivées par rapport à θ), ou, à nouveau, sous forme plus compacte :

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma}} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sqrt{\sigma} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \right) - \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = 0.$$

En posant comme précédemment $\zeta = \Psi(\theta) \cdot G(\theta - t)$, il vient à nouveau

$$2 \frac{\Psi'}{\Psi} \cdot \frac{G'}{G} + \frac{\Psi''}{\Psi} + \left(\frac{1}{2} \frac{h'}{h} + \frac{b'}{b} \right) \left(\frac{\Psi'}{\Psi} + \frac{G'}{G} \right) = 0.$$

⁽²²⁾ Cf. GREEN, G., *Cambr. Trans.*, VI (1837) (= *Papers*, 225) et LAMB., H., *op. cit.*, p. 274.

Les termes en G'/G s'annulent si

$$2 \frac{\Psi''}{\Psi} + \frac{1}{2} \frac{h'}{h} + \frac{b'}{b} = 0,$$

c'est-à-dire si $\Psi = B \cdot b^{-1/2} h^{-1/4}$ ($B = \text{const.}$).

Quant à l'équation en G et Ψ , elle sera satisfaite si les grandeurs Ψ''/Ψ et Ψ'/Ψ sont négligeables devant G'/G . Il est aisé de montrer que ceci implique les restrictions sur les variations de b' et h' déjà établies plus haut.

Dans les pages qui suivent, l'on étudiera un certain nombre de lacs de largeur et de profondeur variable; on verra (cf. p. 46) que les conclusions qui s'en dégagent quant au comportement de ζ rejoignent bien le résultat obtenu ci-dessus : $\zeta \sim b^{-1/2} h^{-1/4}$.

Résoudre l'équation de CHRYSTAL (I.10) revient évidemment à chercher pour quelles valeurs particulières du paramètre λ (« valeurs propres », $\lambda_1, \lambda_2, \dots$) l'équation admet des solutions non nulles (« fonctions propres », u_1, u_2, \dots).

En vertu des théorèmes généraux sur les problèmes de fonctions propres, on peut montrer aisément que les fonctions propres u_1, u_2, \dots de l'équation de CHRYSTAL sont orthogonales entre elles, c'est-à-dire que l'on a, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \frac{u_i u_j}{\sigma(v)} dv = \begin{cases} 0 & (i \neq j); \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

En effet, l'équation est « auto-adjointe »⁽²³⁾, c'est-à-dire que l'on a pour deux fonctions « de comparaison » (c'est-à-dire satisfaisant aux conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, et deux fois dérivables) U, V les deux égalités :

$$\int_0^a (U V''' - V U''') dv = 0 \quad \text{et} \quad \int_0^a \left(-U \frac{V'}{\sigma(v)} + V \frac{U'}{\sigma(v)} \right) dv = 0;$$

en effet, la première égalité peut s'écrire

$$(UV' - VU')' - \int_0^a (U'V' - V'U') dv = 0$$

et la seconde est une identité.

Or, deux fonctions propres u_i, u_j satisfont évidemment aussi à ces égalités, et l'on a en outre, à cause de l'équation (I.10),

$$u_i' = -\lambda_i u_i / \sigma(v) \quad \text{et} \quad u_j' = -\lambda_j u_j / \sigma(v).$$

⁽²³⁾ Cf. COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme und ihre Numer. Behandl.*, Chelsea, New-York, 1948, pp. 59 sqq.

Par suite, la seconde égalité peut s'écrire :

$$\int_0^a \left[\frac{u_i u_j \lambda_j}{\sigma(v)} - \frac{u_j u_i \lambda_i}{\sigma(v)} \right] dv = (\lambda_j - \lambda_i) \int_0^a u_i u_j \frac{dv}{\sigma(v)} = 0;$$

λ_i étant supposé différent de λ_j , on a la propriété d'orthogonalité annoncée.

Naturellement on peut reprendre le même raisonnement point par point pour l'équation (I.11); les relations d'orthogonalité seront dans ce cas :

$$\int_0^c \zeta_i \zeta_j \sigma(s) ds = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{ou} \quad 1 \quad (i = j)$$

(les fonctions ζ_i, ζ_j étant normées).

§ 5. SOLUTIONS EXACTES DE L'ÉQUATION DE CHRYSTAL.

Dans un certain nombre de cas simples, l'équation de CHRYSTAL (I.10) admet des solutions exactes. Leur étude permet de se faire une idée des phénomènes, et notamment de l'effet que peuvent avoir sur la période, sur l'emplacement des ventres et des nœuds ou sur la distribution des amplitudes des seiches, diverses modifications de la forme du bassin; on sera ainsi mieux à même de juger dans quelle mesure on pourra procéder sur un lac réel (et donc le plus souvent de forme capricieuse), à des régularisations de contour ou de profondeur, sans altérer notablement les résultats que l'on a en vue.

a) Pour mémoire, reprenons le cas du lac de profondeur uniforme h_0 , de largeur constante (quelconque puisque b constant s'élimine de l'équation) et de longueur l . L'équation de CHRYSTAL se réduit à :

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\omega^2}{gh_0} \xi = 0, \quad (\text{I.12})$$

et admet pour solution

$$\xi = \frac{\sin \left(\frac{\omega}{\sqrt{gh_0}} x \right)}{\cos \left(\frac{\omega}{\sqrt{gh_0}} x \right)};$$

à cause des conditions-frontière, seul le sinus est recevable, et l'on a

$$\frac{\omega^2}{gh_0} = \frac{k^2 \pi^2}{l^2}$$

($k =$ entier positif quelconque, = nombre de nœuds de la seiche). La solution s'écrit dès lors :

$$\xi_k = A_k \sin \frac{k \pi x}{l}.$$

Puisque $\omega = 2 \pi / T$, on a

$$T_k = \frac{2l}{k \sqrt{gh_0}},$$

expression qui n'est autre que la formule de MERIAN. Comme $\zeta = -\frac{\partial u}{\partial v} = (icv) - h_0 \frac{\partial \xi}{\partial x}$ la solution peut aussi s'écrire

$$\zeta_k = C_k \cos \frac{k\pi x}{l}.$$

b) Cas du lac à fond parabolique concave : $h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$ et de largeur constante quelconque.

Au lieu de procéder comme G. CHRYSTAL ⁽²⁴⁾, qui écrit la solution sous forme de série potentielle, dont il détermine ensuite les coefficients par une loi de récurrence, nous modifierons légèrement l'équation (I.10) afin de faire apparaître ζ au lieu de ξ et de donner ainsi à l'équation la forme habituelle de l'équation de LEGENDRE.

On a, pour l'équation de continuité

$$\zeta = -\frac{\partial [h(x) \xi]}{\partial x},$$

et pour l'équation de mouvement

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

ou, puisque le mouvement est harmonique ($\xi \sim e^{i\omega t}$) :

$$\frac{\omega^2}{g} \xi = \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

L'élimination de ξ fournit

$$\frac{d}{dx} \left[h(x) \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda \zeta = 0.$$

On a alors, avec $h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$, et en posant $\frac{x}{a} = x'$, $\frac{\lambda a^2}{h_0} = \mu$:

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x'^2) \frac{d\zeta}{dx'} \right] + \mu \zeta = 0. \quad (\text{I.13})$$

A cause de l'inclinaison des parois en $x' = \pm 1$, les conditions-frontière sont modifiées : il faut exprimer que le mouvement a lieu tangentiellement au fond aux points $x' = \pm 1$: on a donc $\zeta = -\xi dh/dx'$ en ces points.

L'équation du mouvement permet d'éliminer ξ ; on obtient ainsi les conditions-frontière $\mu\zeta(1) - 2\zeta'(1) = \mu\zeta(-1) + 2\zeta'(-1) = 0$.

L'équation de LEGENDRE (I.13) a pour solution $\zeta = C_k P_k(x')$, avec $\mu = k(k+1)$; $P_k(x')$ = k° polynôme de LEGENDRE, C_k = constante arbitraire, k = entier positif quelconque. On vérifie sans difficulté que les conditions-frontière sont satisfaites par les poly-

(24) CHRYSTAL, G., *op. cit.*, p. 617.

nômes de LEGENDRE quand $\mu = k(k+1)$: pour $k = 1$, $\mu = 2$, $\zeta_1 = C_1 x'$; pour $k = 2$, $\mu = 6$, $\zeta_2 = C_2(3x'^2 - 1)$; pour $k = 3$, $\mu = 12$, $\zeta_3 = C_3(5x'^3 - 3x')$, etc.

En normant, on trouve pour les constantes les valeurs

$$C_1 = \frac{\sqrt{6}}{2}, \quad C_2 = \frac{\sqrt{10}}{4}, \quad C_3 = \frac{\sqrt{14}}{4}, \quad \text{etc.}$$

On arriverait au même résultat en exigeant que ζ reste fini en $x' = \pm 1$ et en développant la solution ζ sous forme de série potentielle en x' : pour que la série soit finie en $x' = \pm 1$, il faut qu'elle se termine, ce qui fournit la condition $\mu = k(k+1)$, c'est-à-dire les valeurs propres au paramètre et par suite les périodes d'oscillation :

$$T_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{k(k+1)gh_0}}.$$

Dans l'oscillation uninodale, le profil de l'eau reste plan; il est parabolique pour la binodale; pour ce second mode, les nœuds sont situés en

$$x' = \pm \sqrt{3}/3 = \pm 0,5774,$$

c'est-à-dire sont déplacés légèrement vers les extrémités, et la dénivellation ζ est deux fois plus grande aux extrémités ($x' = \pm 1$) qu'au centre ($x' = 0$).

Enfin, remarquons encore que les périodes des quatre premiers modes sont entre elles comme 1,000, 0,577, 0,408, 0,316; pour le lac de profondeur constante, de même longueur $2a$ et de même profondeur moyenne $2h_0/3$, ces périodes étaient entre elles comme 1,000, 0,500, 0,333, 0,250. Leurs valeurs respectives par rapport à celles du lac parabolique sont données par le quotient

$$\frac{2\sqrt{k(k+1)}}{k\pi\sqrt{2/3}},$$

qui, pour $k = 1, 2, 3, 4$, prend les valeurs 1,1026, 0,9549, 0,9003, 0,8717.

On voit donc que le rôle joué par la forme du bassin, le volume de l'eau restant le même dans les deux cas, n'est pas négligeable. Si le lac parabolique est coupé par un mur vertical en $x' = 0$, les solutions sont les mêmes, mais l'on a une condition frontière nouvelle : $\zeta'(0) = 0$ (ventre à l'origine), et par suite, seuls les polynômes $P_k(x')$ d'ordre pair peuvent convenir; les périodes des deux premiers modes sont dans le rapport 0,577 : 0,316, et le nœud de l'uninodale est en $x' = 0,5774$.

c) Le cas du lac parabolique convexe

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)$$

est notablement plus compliqué et de peu d'intérêt pratique, un tel profil ne se rencontrant pratiquement jamais parmi les lacs réels qu'on peut être amené à étudier. Les solutions ζ ne s'expriment plus par des polynômes mais par des fonctions transcendentes qu'il faut tabuler; notons simplement que le rapport T_2/T_1 est maintenant égal à 0,474 et que les nœuds de l'oscillation binodale déplacés en direction du haut-fond central, se trouvent en $x' = \pm 0,472$.

G. CHRYSTAL traite ensuite différents cas des lacs (de largeur toujours constante) dont le profil peut se décomposer en plusieurs arcs de parabole raccordés de manière continue; il en résulte en général des équations d'une complication telle que l'on n'a plus guère d'intérêt à en chercher des solutions « exactes » et qu'il est plus commode, le cas échéant, de les résoudre par des méthodes approchées; aussi n'entrerons-nous pas dans la discussion de ces problèmes qui, du reste, n'éclaire guère la question qui nous occupe ici ⁽²⁵⁾.

d) Plus intéressant est le cas du lac quartique concave (de largeur constante)

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^2.$$

L'équation différentielle du problème s'écrit ($\mu = \lambda a^2/h_0$, $x' = x/a$) :

$$\frac{d^2 u}{dx'^2} + \frac{\mu u}{(1-x'^2)^2} = 0. \quad (\text{I.14})$$

Posons, avec CHRYSTAL ⁽²⁶⁾, $\mu = 4m^2 + 1$; on a alors l'intégrale

$$u = \sqrt{1-x'^2} \left[A \cos \left(m \operatorname{Log} \frac{1+x'}{1-x'} \right) + B \sin \left(m \operatorname{Log} \frac{1+x'}{1-x'} \right) \right].$$

Les points $x' = \pm 1$ sont maintenant des points de singularité essentielle de la solution, et par suite, la courbe $h(x) = h_0(1-x'^2)^2$ ne peut être utilisée dans son entièreté; limitons donc le lac par deux murs verticaux en $x' = p$ et $x' = q$. Les conditions-frontière en ces murs sont $u(p) = u(q) = 0$. Posons

$$\operatorname{Log} \frac{1+p}{1-p} = r, \quad \operatorname{Log} \frac{1+q}{1-q} = s;$$

on a alors

$$\begin{aligned} A \cos mr + B \sin mr &= 0, \\ A \cos ms + B \sin ms &= 0, \end{aligned}$$

et par suite

$$\sin m(r-s) = 0, \quad \text{c. à d.} \quad m \operatorname{Log} \left(\frac{1+p}{1+q} \cdot \frac{1-q}{1-p} \right) = k\pi.$$

On a donc

$$\mu = 4m^2 + 1 = \frac{4k^2\pi^2}{(r-s)^2} + 1,$$

et, comme

$$\mu = \frac{4\pi^2 a^2}{gh_0 T^2},$$

on en tire aisément

$$T_k^2 = \frac{4\pi^2 a^2}{g h_0 [1 + 4k^2\pi^2/(r-s)^2]} \quad \text{ou} \quad T_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{g h_0 [1 + 4k^2\pi^2/(r-s)^2]}}.$$

⁽²⁵⁾ Cf. CHRYSTAL, G., *op. cit.*, pp. 628-635.

⁽²⁶⁾ CHRYSTAL, G., *Some Further Results in the Mathematical Theory of Seiches*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 25 (1904), pp. 638 sqq.

Si les murs sont disposés symétriquement par rapport à l'origine (centre du lac, endroit de profondeur maximum), c'est-à-dire si $p = -q$, on a

$$r - s = 2 \operatorname{Log} \frac{1 + p}{1 - p};$$

si en outre $(r - s)$ est petit, c'est-à-dire si $p \ll 1$ (murs « voisins » du centre), on a

$$T_k \simeq \frac{(r - s) a}{k \sqrt{gh_0}},$$

et puisque dans ce cas

$$\operatorname{Log} \frac{1 + p}{1 - p} \simeq \operatorname{Log} (1 + 2p) \simeq 2p,$$

on a finalement

$$T_k \simeq \frac{4p}{k \sqrt{gh_0}}.$$

On remarque que ce résultat est identique à celui trouvé pour le lac de profondeur constante (formule de MERIAN). On pouvait du reste s'y attendre, puisque, si $p = -q \ll 1$, le lac est réduit à sa portion centrale, où la profondeur ne varie que très peu avec x' .

Au contraire, si $(r - s)$ devient grand, c'est-à-dire si $p = -q$ se rapproche de 1, on voit immédiatement que T_k tend vers $2\pi a / \sqrt{gh_0}$, expression indépendante de k : toutes les seiches, indépendamment du nombre de leurs nœuds, tendent à prendre la même période. C'est le phénomène des « seiches anomales » de CHRYSTAL. On obtient le même résultat en faisant $m = 0$, c'est-à-dire $\mu = 1$, sans faire encore d'hypothèses sur p et q .

L'intégrale de l'équation différentielle s'écrit alors

$$u = \sqrt{1 - x'^2} \left[A + B \operatorname{Log} \frac{1 + x'}{1 - x'} \right].$$

G. CHRYSTAL ⁽²⁷⁾ montre que dans le cas $p = -q$, cette solution prend la forme simple $u = \sqrt{1 - x'^2}$.

Le cas de lac quartique est instructif : il montre que pour $(r - s)$ petit, c'est-à-dire le lac étant limité à sa portion centrale, les périodes des trois premiers modes T_1, T_2, T_3 sont entre elles comme

$$\left[1 + \frac{4\pi^2}{(r-s)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \left[1 + \frac{16\pi^2}{(r-s)^2} \right]^{-\frac{1}{2}}, \quad \left[1 + \frac{36\pi^2}{(r-s)^2} \right]^{-\frac{1}{2}},$$

on voit ainsi que $T_1 < 2T_2, T_1 < 3T_3$, etc., et que, moyennant un choix convenable de $(r - s)$, on peut avoir par exemple $T_3 = T_1/2$, ce qui montre qu'une seiche de période égale à la moitié de celle du fondamental n'est pas nécessairement binodale, comme le croyaient couramment les auteurs anciens (F. A. FOREL, P. DU BOYS, etc.).

Un tel mouvement est dit « anharmonique », par opposition au mouvement harmonique, où l'on a $T_1 = kT_k$.

(27) Cf. CHRYSTAL, G., *op. cit.*, pp. 645 sqq.

e) Le cas des lacs quartiques convexes,

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^2$$

moins intéressant que le précédent du point de vue pratique car ne se rencontrant sans doute jamais parmi les lacs réels, conduit de manière analogue aux périodes

$$T_k = \frac{2\pi a}{\sqrt{gh_0 [4k^2 \pi^2 / (r-s)^2 - 1]}}$$

de sorte que l'on a maintenant $T_1 > 2T_2$, $T_1 > 3T_3$, etc. ⁽²⁸⁾.

A partir de ces résultats et de ceux qu'il avait obtenus pour les lacs paraboliques (concaves et convexes), CHRYSTAL établit une classification des lacs en concaves et en convexes, les premiers étant caractérisés par la relation

$$T_k = \frac{T_1}{\sqrt{k^2 + \varepsilon^2}}$$

et les seconds par

$$T_k = \frac{T_1}{\sqrt{k^2 - \varepsilon^2}}$$

(ε = constante réelle) propriétés que l'observation semblerait confirmer ⁽²⁹⁾.

L'auteur entreprend également de comparer ses résultats avec ceux que l'on obtiendrait en appliquant la formule de DU BOYS.

Cette formule, établie primitivement à partir de considérations physiques n'intéressant que le mode fondamental [considéré comme résultant d'une onde progressive, de longueur double de celle du lac, se déplaçant avec une vitesse $\sqrt{gh(x)}$ et se réfléchissant alternativement aux deux extrémités ⁽³⁰⁾], constitue en fait une première approximation de la valeur propre de l'équation de CHRYSTAL (I.10); elle est rigoureuse pour $\sigma(v) = \text{constante}$ (canal de section droite rectangulaire uniforme).

En effet, l'équation de CHRYSTAL

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0, \tag{I. 10}$$

avec ses conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, peut être considérée du point de vue mathématique comme résultant de la transformation de l'équation de STURM-LIOUVILLE :

$$\frac{d}{dx} \left[k(x) \frac{dy}{dx} \right] + \lambda g(x) y = 0$$

⁽²⁸⁾ Cf. CHRYSTAL, G., *op. cit.*, pp. 642 sqq.

⁽²⁹⁾ Cf. BOUSSE, H., *op. cit.*, p. 154.

⁽³⁰⁾ Cf. DU BOYS, P., *op. cit.*, p. 644, note 8.

(où, dans tout l'intervalle $0 \leq x \leq l$, les fonctions $k(x)$ et $g(x)$ sont supposées continues et ne s'annulent pas; en outre, $k'(x)$ et $[g(x) \cdot k(x)]''$ sont supposées continues dans ce même intervalle), effectuée à l'aide des relations (posées), dont l'idée remonte à G. GREEN et à G. G. STOKES :

$$w = \frac{1}{K} \int_0^x (g/k)^{1/2} dx; \quad u = (gk)^{1/4} y; \quad \rho^2 = K^2 \lambda a^2 / \pi^2;$$

$$K = \frac{1}{a} \int_0^l (g/k)^{1/2} dx = \text{const.}^{(31)}.$$

Ces relations transforment l'équation de STURM-LIOUVILLE ci-dessus en l'équation :

$$\frac{d^2 u}{dw^2} + \left[\frac{\rho^2 \pi^2}{a^2} - q(w) \right] u = 0,$$

avec

$$q(w) = \frac{\theta''(w)}{\theta(w)},$$

en posant $(gk)^{1/4} = \theta(w)$; l'intervalle $0 \leq x \leq l$ est remplacé par l'intervalle $0 \leq w \leq a$, dans lequel $q(w)$ est supposé continu.

Les conditions-frontière sont $u(0) = u(a) = 0$.

L'équation

$$\frac{d^2 u}{dw^2} + \frac{\rho^2 \pi^2}{a^2} u(w) = q(w) u(w)$$

admet pour solution générale :

$$u(w) = A \cos \frac{\rho \pi w}{a} + B \sin \frac{\rho \pi w}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \sin \frac{\rho \pi}{a} (w-z) \cdot q(z) u(z) dz.$$

Les conditions-frontière donnent

$$A = 0 \quad \text{et} \quad B = \frac{1}{\sin(\rho \pi/a)} \cdot \left(\frac{a}{\rho \pi} \right)^2 \int_0^a \cos \frac{\rho \pi}{a} (a-z) \cdot (q' u - q u') dz.$$

Par suite, la solution générale peut s'écrire (à un facteur constant près) :

$$u(w) = \sin \frac{\rho \pi w}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, w)$$

avec

$$\alpha(\rho, w) = \int_0^w \sin \frac{\rho \pi}{a} (w-z) \cdot q(z) u(z) dz$$

(31) Cf. GREEN, G., *Papers*, p. 225 et LAMB, H., *op. cit.*, p. 274. Cf. également COURANT, R. und HILBERT, D., *Meth. Math. Physik*, I, p. 250 et INCE, E. L., *Ordin. Diff. Equations*, p. 270.

ou

$$\begin{aligned}
 u(w) &= \sin \frac{\rho \pi w}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \sin \frac{\rho \pi}{a} (w-z) \cdot q(z) \cdot \left[\sin \frac{\rho \pi z}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, z) \right] dz \\
 &= \sin \frac{\rho \pi w}{a} \cdot \left\{ 1 + \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \cos \frac{\rho \pi z}{a} \cdot \left[\sin \frac{\rho \pi z}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, z) \right] q(z) dz \right\} \\
 &\quad - \cos \frac{\rho \pi w}{a} \cdot \frac{a}{\rho \pi} \int_0^w \sin \frac{\rho \pi z}{a} \cdot \left[\sin \frac{\rho \pi z}{a} + \frac{a}{\rho \pi} \cdot \alpha(\rho, z) \right] q(z) dz \\
 &= \sin \frac{\rho \pi w}{a} \cdot \left\{ 1 + 0 \left[\left(\frac{a}{\rho \pi} \right)^2 \right] \right\} + \cos \frac{\rho \pi w}{a} \cdot 0 \left[\left(\frac{a}{\rho \pi} \right)^2 \right].
 \end{aligned}$$

On démontre que dans ce cas les valeurs propres sont données par

$$\rho_j = (j+1) + 0(j^{-1}) \quad (j = 0, 1, 2 \dots)^{(32)}.$$

On a donc bien, en première approximation,

$$\rho_j^2 = \frac{a^2}{\pi^2} K^2 \lambda = (j+1)^2,$$

c'est-à-dire, à cause des relations de la page 36 :

$$T_j = \frac{2}{j} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{gh(x)}}$$

c'est-à-dire la formule de DU BOYS généralisée.

Naturellement, dans le cas où $g(x)$ et $k(x)$ se réduisent à des constantes (section droite uniforme), on a $q(w) = 0$, et il reste simplement

$$u(v) = \sin \frac{\rho \pi v}{a},$$

ρ étant maintenant un entier positif (à cause des conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$); la formule de DU BOYS est alors rigoureuse.

On a vu sur des exemples que les périodes des seiches k -nodales sont en général loin d'être k fois plus courtes que celles du fondamental; aussi ne faut-il pas s'étonner si les résultats que fournit la formule de DU BOYS pour les modes supérieurs soient médiocres. Pour le fondamental du lac quartique l'approximation paraît acceptable : on a, en prenant le signe supérieur ou inférieur suivant qu'il s'agit du lac concave ou du lac convexe :

$$\frac{T_1(\text{DU BOYS})}{T_1(\text{CHRYSAL})} = \sqrt{1 \pm \frac{(r-s)^2}{4\pi^2}}$$

(le cas $r = s$ étant évidemment exclu, de sorte que la formule de DU BOYS ne fournit jamais la période exacte).

(32) Cf. INCE, E. L., *op. cit.*, *loc. cit.*

f) Cas du canal dont le fond se compose de deux plans également inclinés se coupant au milieu du canal (point de profondeur maximum = h_0) ⁽³³⁾.

Étant donné la symétrie d'un tel canal, il suffit d'étudier les seiches dans l'une quelconque de ses moitiés; dans l'autre moitié, elles seront symétriques ou antisymétriques suivant que le centre du lac est un point ventral ou un point nodal.

Prenons l'une des extrémités comme origine; le fond a alors pour équation, depuis ce point jusqu'au milieu ($x = a$) :

$$h(x) = h_0 \frac{x}{a}.$$

L'équation en ζ s'écrit

$$\frac{d}{dx} \left[h_0 \frac{x}{a} \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda \zeta = 0$$

ou, en posant $\lambda a / h_0 = \mu$:

$$\frac{d}{dx} \left[x \frac{d\zeta}{dx} \right] + \mu \zeta = 0, \quad (\text{I.15})$$

et admet pour solution $\zeta = A J_0(2\sqrt{\mu x})$.

Les équations aux périodes sont, pour les modes symétriques : $J'_0(2\sqrt{\mu a}) = 0$, et pour les modes antisymétriques : $J_0(2\sqrt{\mu a}) = 0$.

Les deux premières racines de ces équations étant respectivement $2\sqrt{\mu a} = 3,8317$, $7,0156$, et $2\sqrt{\mu a} = 2,4048$, $5,5201$, on aura, puisque

$$\mu = \frac{4\pi^2 a}{gh_0 T^2} :$$

$$T_1 = 0,8317 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0}; \quad T_2 = 0,5220 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0}; \quad T_3 = 0,3623 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0};$$

$$T_4 = 0,2851 \times 2\pi a / \sqrt{gh_0};$$

ces périodes sont donc entre elles comme 1,000, 0,628, 0,436, 0,343.

Si le lac était coupé par un mur vertical en $x = a$, on ne retiendrait évidemment que les modes symétriques, les périodes ci-dessus T_2 , T_4 , etc. devenant respectivement celles du fondamental, de la binodale, etc.

G. CHRYSTAL envisage encore quelques cas spéciaux de lacs à fond plan incliné, tronqués, dissymétriques, etc. Mais, tout comme pour les lacs paraboliques similaires, les solutions sont compliquées et n'éclairent guère les phénomènes.

Examinons pour suivre quelques cas de lacs de largeur variable, la profondeur étant tantôt constante, tantôt variable.

Si l'on veut traiter le problème en général, il faut introduire une seconde variable horizontale, y ; l'on obtient pour l'équation de continuité

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) \cdot v_x] - \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) \cdot v_y]$$

et pour les équations du mouvement

$$\frac{\partial v_x}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad \frac{\partial v_y}{\partial t} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

⁽³³⁾ CHRYSTAL, G., *Hydrodynamical Theory of Seiches*, pp. 636 sqq.

Éliminant v_x et v_y et prenant $\zeta \sim e^{i\omega t}$, il vient ⁽³⁴⁾

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] + \frac{\omega^2}{g} \zeta = 0. \quad (\text{I.16})$$

g) Un premier cas, classique, est celui du lac circulaire de rayon a et de profondeur constante h_0 ⁽³⁵⁾.

En passant à des coordonnées polaires (r, θ) , à l'aide des relations $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, on trouve l'équation bien connue

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \theta^2} + \lambda \zeta = 0, \quad (\text{I.17})$$

où l'on a posé $\omega^2/g h_0 = \lambda$. Les variables se séparent aisément si l'on pose $\zeta = f(r) \frac{\cos s \theta}{\sin s \theta}$ (s représentant le nombre de nœuds diamétraux) et l'on trouve $f(r) = A_s J_s(r\sqrt{\lambda})$. La condition-frontière habituelle $\partial \zeta / \partial n = 0$ en $r = a$ ($n =$ normale au mur vertical qui limite le bassin, dirigée vers l'extérieur) fournit l'équation aux périodes $J'_s(a\sqrt{\lambda}) = 0$. Dans le cas $s = 0$, le mouvement est complètement symétrique autour de l'origine, et les racines sont $a\sqrt{\lambda} = 3,8317, 7,0156, 10,173, \text{ etc...}$, d'où

$$T_1 = 0,8199 \times 2a/\sqrt{gh_0}; \quad T_2 = 0,4478 \times 2a/\sqrt{gh_0}; \quad T_3 = 0,3088 \times 2a/\sqrt{gh_0}.$$

On trouvera une discussion complète des différents cas dans l'ouvrage de H. LAMB ⁽³⁶⁾.

Le cas du lac circulaire de profondeur variable $h(r) = h_0(1 - r^2/a^2)$ est aussi traité en détail par cet auteur ⁽³⁷⁾, auquel nous renvoyons pour compléments d'information. Il est intéressant de remarquer que le cercle nodal (unique) du mode fondamental de ce lac est notablement déplacé vers la côte ($r = 0,707 a$, contre $r = 0,628 a$ dans le cas du lac circulaire de profondeur constante); quant à la période du fondamental, elle est aussi plus longue dans le lac de profondeur variable que dans celui de profondeur constante. Ces résultats sont similaires à ceux que fournit la comparaison du canal parabolique au canal de profondeur uniforme (cf. p. 32).

Le traitement du problème à deux dimensions étant beaucoup plus compliqué que celui du problème à une dimension, il vaut la peine de voir dans quelle mesure les résultats (notamment les périodes d'oscillation) sont affectés lorsqu'on traite à une seule dimension un lac de largeur et de profondeur variables non assimilable à un « canal ». La question a été soulevée par K. HIDAOKA ⁽³⁸⁾ à propos du lac circulaire de profondeur variable $h(r) = h_0(1 - r^2/a^2)$ dont il vient d'être question. On trouve, pour le mode fondamental : $\lambda_1 a^2 = 2$. Si on assimile ce lac à un « canal » de largeur $b(x) = 2a(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ et de profondeur $h(x) = h'_0(1 - x^2/a^2)$, h'_0 étant la profondeur moyenne d'une section

⁽³⁴⁾ Cf. LAMB, H., *Hydrodynamics*, 1945, pp. 282, 291.

⁽³⁵⁾ ID., *op. cit.*, p. 284.

⁽³⁶⁾ ID., *ibid.*

⁽³⁷⁾ ID., *ibid.*, pp. 291-293.

⁽³⁸⁾ HIDAOKA, K., *Oscillations of Water in Spindle-Shaped and Elliptic Basins*. I, Mem. Imp. Mar. Obs. Japan, IV, 2 (1931), pp. 175 sqq.

diamétrale, on trouve $\lambda_1^2 a^2 = 3$. Comme $h_0' = 2h_0/3$, il résulte que l'on doit avoir $T_1 = T_1'$: la période du mode fondamental n'est donc pas affectée par la simplification que l'on a fait subir au problème.

Pour les modes supérieurs toutefois, le désaccord entre les résultats obtenus pour les problèmes à une et à deux dimensions va en s'accroissant à mesure que le nombre de nœuds augmente, ainsi qu'on peut s'y attendre en considérant la forme de la surface libre dans ces différents modes d'oscillations. K. HIDAOKA ⁽³⁹⁾ le remarque à propos de lacs elliptiques et de lacs en forme de fuseau, dont il sera question ci-après.

Dans une série d'articles parus entre 1930 et 1940, cet auteur et ses élèves K. KOENUMA et I. TUBOI ⁽⁴⁰⁾ ont examiné un grand nombre de lacs de largeur variable et de profondeur tantôt constante, tantôt variable, en vue de découvrir des cas admettant des solutions exactes. Nous donnons ici un bref aperçu des travaux de cette école japonaise.

Un long article de K. HIDAOKA est consacré aux lacs en forme de fuseau et aux lacs elliptiques ⁽⁴¹⁾.

h) Une première catégorie de lacs comprend ceux en fuseau, limités par deux paraboles homofocales d'axes opposés, d'équations $y^2 = a(a - 2x)$ et $y^2 = a(a + 2x)$; la profondeur est constante et égale à h_0 .

Le problème est traité d'abord à deux dimensions, à l'aide de coordonnées paraboliques (p, q) définies par

$$x = \frac{a}{2}(p^2 - q^2), \quad y = apq;$$

les solutions s'obtiennent sous forme de fonctions hypergéométriques généralisées ⁽⁴²⁾ mais sont beaucoup trop compliquées pour se prêter commodément à des calculs numériques. Si on se limite à l'étude des oscillations symétriques par rapport à l'axe Oy , le problème se simplifie quelque peu, et les solutions s'expriment en fonctions de BESSEL d'ordre $\pm 1/4$; les lignes nodales consistent en diamètres et en paraboles homofocales à celles qui limitent le bassin : on voit ainsi immédiatement la simplification excessive qu'il y aurait à réduire le problème à une seule dimension, du moins pour les modes qui admettent d'autres lignes nodales que l'axe des x .

Ceci est vérifié par les calculs de HIDAOKA, qui traite à titre d'essai le bassin comme un canal de largeur variable :

$$b(x) = a \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

L'auteur développe les solutions ζ_n en séries potentielles de x/a (puissances impaires seulement pour les modes impairs, et paires seulement pour les modes pairs); les fonctions propres obtenues pour les deux premiers modes diffèrent peu de

$$\cos \frac{\pi x}{a} \quad \text{et} \quad \cos \frac{2\pi x}{a}$$

respectivement.

⁽³⁹⁾ HIDAOKA, K., *Oscillations of Water in Spindle-Shaped and Elliptic Basins*. I, Mem. Imp. Mar. Obs. Japan, IV, 2 (1931), pp. 175 sqq.

⁽⁴⁰⁾ Cf. bibliographie, pp. 306 sqq.

⁽⁴¹⁾ Cf. note 38.

⁽⁴²⁾ Cf. RIEMANN-WEBER, *Partielle Diffgl.*, II, pp. 258-260.

Si l'on compare les résultats obtenus pour le problème ainsi simplifié avec ceux du problème à deux dimensions, on constate que l'accord n'est satisfaisant que pour le fondamental. Déjà pour le second mode, le désaccord entre les périodes obtenues par les deux procédés devient considérable : en effet, la largeur maxima a du « canal » ne peut plus être considérée comme faible devant sa longueur $2a$. Ceci illustre combien l'étude des seiches d'un lac reste incomplète tant que l'on se borne aux seiches longitudinales, surtout si la largeur du lac n'est pas très petite devant sa longueur.

i) L'auteur considère ensuite le cas du lac elliptique de profondeur constante. Si le petit axe est très petit devant le grand, le bassin peut être considéré comme un canal de largeur variable

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Introduisant cette valeur dans l'équation de CHRYSTAL, on obtient une équation du type de celle de MATHIEU; il suffit alors de développer les solutions en série potentielle de x/a (série impaire pour les modes impairs, paire pour les modes pairs) pour obtenir une relation entre trois coefficients, et, par suite, une équation aux valeurs propres sous forme de fraction continue; les racines de celle-ci coïncident avec celles obtenues par S. GOLDSTEIN⁽⁴³⁾ pour le même problème.

La comparaison du lac en fuseau et du lac elliptique va permettre de déterminer l'influence, sur les périodes d'oscillation, d'un rétrécissement du canal vers les extrémités. Pour cela, K. HIDAOKA considère un lac-canal, de profondeur constante h_0 et de largeur

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m,$$

m étant un nombre positif réel.

Suivant que $m = 0, 1/2$ ou 1 , on obtient un lac-canal rectangulaire, elliptique ou en fuseau. Posons

$$m = 2\gamma \quad \text{ou} \quad \gamma = \frac{\text{Log } m}{\text{Log } 2}$$

et appelons, avec HIDAOKA, γ « l'indice de rétrécissement » du lac vers les extrémités. Quand $\gamma = -\infty$, le bassin est rectangulaire; quand $\gamma = -1$ il est elliptique; quand $\gamma = 0$ il est en fuseau, et quand $\gamma = 1, 2, \dots$ le rétrécissement devient de plus en plus marqué (cf. fig. 1). L'équation du bassin est donc

$$\frac{x^2}{a^2} + \left(\frac{y^2}{b_0^2}\right)^{\frac{1}{2m}} = 1.$$

L'équation de CHRYSTAL devient, en posant $\frac{x}{a} = x', \lambda a^2 = \mu$:

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x'^2)^m \frac{d\zeta}{dx'} \right] + \mu (1 - x'^2)^m \zeta = 0.$$

⁽⁴³⁾ GOLDSTEIN, S., *Special Case of Tidal Motions in Elliptic Basins*, Monthly Notices Roy. Astr. Soc., Geoph. Supp. II, 1 (1928); Id., *Free Oscill. of Water in a Canal of Elliptic Plan*, Proc. London Math. Soc., 28 (1928), pp. 91-101.

En procédant comme plus haut, c'est-à-dire en développant les solutions en séries potentielles (paires ou impaires suivant la parité du mode considéré) et en écrivant les relations entre trois coefficients sous forme de fraction continue, l'auteur obtient des valeurs propres μ_k pour un certain nombre de valeurs-types de γ . Pour le fondamental (μ_1) on a la table suivante :

γ	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	$-\infty$,
m	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	0,
$\sqrt{\mu_1}$	3,557	2,589	2,150	1,887	1,737	1,655	1,616	1,597	$1,571 = \pi/2$.

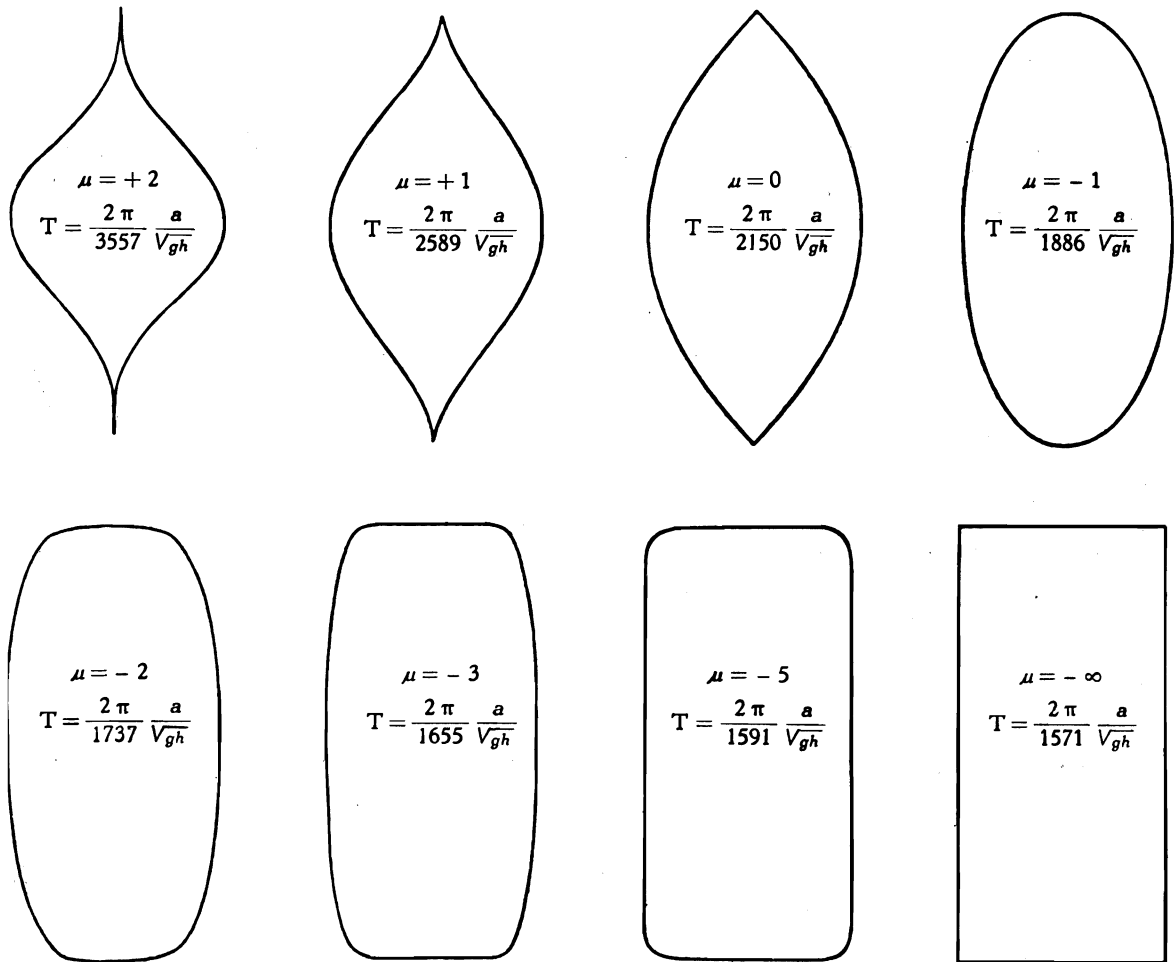


FIG. 1.

Quelques contours de bassins dérivés du bassin elliptique.

[D'après K. HIDAOKA, Mem. Imp. Mar. Obs. Japan, IV, 2 (1931), pp. 175 sqq.]

Au lieu de μ , lire γ sur cette figure.

Le rétrécissement du lac vers les extrémités a donc pour effet de raccourcir la période de manière très marquée : du lac rectangulaire ($m = 0$) au lac en fuseau ($m = 1$), ce raccourcissement de la période fondamentale atteint 27 %.

j) Si les lacs en fuseau et elliptiques se prêtent relativement bien au calcul de modes d'oscillation les plus bas, il n'en est plus de même pour les modes supérieurs : la réso-

lution des équations aux valeurs propres écrites sous forme de fractions continues devient fastidieuse pour les racines supérieures.

C'est pourquoi K. HIDAOKA envisage une nouvelle catégorie de lacs, dont la largeur est donnée par

$$b(x) = 2b_0 \cos^m \frac{\pi x}{2a};$$

la forme de ces lacs diffère assez peu de celle des lacs de largeur

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m;$$

pour $m = 0, 1/2, 1$, on retrouve notamment un lac (rigoureusement) rectangulaire, un lac à peu près elliptique et un lac à peu près en fuseau.

L'équation de CHRYSTAL devient, en posant $\sin^2 \frac{\pi x}{2a} = x'$ et $\lambda a^2 = \mu$:

$$x'(1-x')\zeta'' + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{m}{2} + 1\right)x'\right]\zeta' + \frac{\mu}{\pi^2}\zeta = 0.$$

Si l'on écrit

$$\alpha = \frac{1}{4\pi} [m\pi - \sqrt{m^2\pi^2 + 16\mu}];$$

$$\beta = \frac{1}{4\pi} [m\pi + \sqrt{m^2\pi^2 + 16\mu}]; \quad \gamma = \frac{1}{2},$$

cette équation prend la forme hypergéométrique

$$x'(1-x')\zeta'' + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)x']\zeta' - \alpha\beta\zeta = 0,$$

et ζ s'exprime sous forme de fonctions hypergéométriques. Les solutions devant être finies en $x = \pm a$, on obtient, après quelques calculs, les valeurs propres :

$$\mu_{2k-1} = (2k-1)(2k-1+m) \cdot \pi^2/4 \quad \text{pour les modes impairs, d'ordre } 2k-1,$$

$$\mu_{2k} = 2k(2k+m) \cdot \pi^2/4 \quad \text{pour les modes pairs, d'ordre } 2k.$$

On vérifie notamment que pour k petit, ces résultats diffèrent peu de ceux obtenus pour les lacs elliptiques et en fuseau traités précédemment.

k) Passons maintenant aux lacs (en fuseau et elliptique) de profondeur variable, suivant la loi parabolique

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right).$$

Pour le lac en fuseau, de largeur $b(x) = 2b_0(1 - x^2/a^2)$, l'équation de CHRYSTAL devient, en posant $x/a = x'$ et $\lambda a^2 = \mu$:

$$(1-x'^2)\zeta'' - 4x'\zeta' + \mu\zeta = 0.$$

Les modes impairs sont donnés par

$$\zeta = Ax' \cdot F\left(1 - k, \frac{3}{2} + k, \frac{3}{2}; x'^2\right) \quad (k = 1, 2 \dots)$$

avec $\mu = 4k^2 + 2k - 2$, et les modes pairs par

$$\zeta = B \cdot F\left(-k, \frac{3}{2} + k, \frac{1}{2}; x'^2\right)$$

avec $\mu = 4k^2 + 6k$.

Pour le fondamental, le profil de l'eau reste plan, et pour le second mode, il est parabolique, avec ses nœuds en $x' = \pm 0,447$.

L'effet du rétrécissement du lac vers les extrémités l'emporte donc ici sur celui du relèvement du fond vers ces mêmes extrémités, puisque les nœuds sont déplacés vers le centre du lac.

Dans le cas du lac elliptique, $b(x) = 2b_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{\frac{1}{2}}$, on obtient de même l'équation

$$(1 - x'^2)\zeta'' - 3x'\zeta' + \mu\zeta = 0;$$

les modes impairs sont donnés par

$$\zeta = Ax' \cdot F\left(1 - k, 1 + k, \frac{3}{2}; x'^2\right),$$

avec $\mu = 4k^2 - 1$, et les modes pairs par

$$\zeta = B \cdot F\left(-k, 1 + k, \frac{1}{2}; x'^2\right)$$

avec $\mu = 4k^2 + 4k$.

Le fondamental présente cette fois encore un profil plan et le second mode un profil parabolique; quant aux nœuds, ils sont maintenant en $x' = \pm 0,500$, c'est-à-dire que les deux effets mentionnés ci-dessus se compensent exactement.

Ces résultats sont encore susceptibles de la même généralisation que ceux obtenus pour les lacs de profondeur constante. Écrivons pour la largeur

$$b(x) = 2b_0\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^m;$$

l'équation de CHRYSTAL devient

$$(1 - x'^2)\zeta'' - 2(m + 1)x'\zeta' + \mu\zeta = 0,$$

et les modes impairs sont donnés par

$$\zeta = Ax' \cdot F\left(1 - k, m + \frac{1}{2} + k, \frac{3}{2}; x'^2\right),$$

avec $\mu = 4k^2 + 2(2m - 1)k - 2m$, tandis que l'on a pour les modes pairs

$$\zeta = B \cdot F\left(-k, m + \frac{1}{2} + k, \frac{1}{2}; x'^2\right)$$

avec $\mu = 4k^2 + 2(2m + 1)k$.

Si l'on définit à nouveau un « indice de rétrécissement » comme plus haut,

$\gamma = \frac{\text{Log } m}{\text{Log } 2}$, on peut dresser la table suivante pour $\sqrt{\mu_1}$:

γ	2	1	0	-1	-2	-3	-4	-5	$-\infty$,
m	4	2	1	1/2	1/4	1/8	1/16	1/32	0,
$\sqrt{\mu_1}$	3,162	2,449	2,000	1,732	1,581	1,500	1,458	1,436	$1,414 = \sqrt{2}$.

On voit que maintenant, du lac rectangulaire ($m = 0$) au lac en fuseau ($m = 1$), le raccourcissement de la période fondamentale est encore plus sensible qu'à profondeur constante, puisqu'il est voisin de 30 %.

Comparons encore les périodes d'oscillation des lacs de profondeur uniforme et de profondeur variable (fond parabolique), la profondeur uniforme h_0 étant calculée de manière à ce que le volume d'eau soit le même dans les deux cas :

$$\bar{h}_0 = \frac{\int_0^a h(x) b(x) dx}{\int_0^a b(x) dx},$$

on trouve ainsi : $\bar{h}_0 = 4h_0/5$ pour le lac en fuseau et $\bar{h}_0 = 3h_0/4$ pour le lac elliptique.

Pour le fondamental, on a $T_{\text{var.}}/T_{\text{unif.}} = 0,962$ pour le bassin en fuseau et 0,943 pour le bassin elliptique; pour le second mode, ce rapport est respectivement égal à 1,073 et 1,061; on voit que les écarts de périodes entre lacs de profondeur uniforme et de profondeur variable (parabolique) sont peu importants.

Dans les lacs à profondeur variable, on s'est limité ici au profil parabolique, symétrique par rapport au centre ($x = 0$). Grâce à cette symétrie (jointe à celle de la largeur), la dénivellation ζ pouvait s'exprimer chaque fois sous forme de séries potentielles paires ou impaires (suivant les modes considérés) de x/a . Si la profondeur $h(x)$ cesse d'être symétrique par rapport au centre il n'en sera plus ainsi. Ce sera notamment le cas si $h(x)$ varie linéairement avec x , par exemple si l'on a

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x}{a}\right) \quad \text{ou} \quad h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right).$$

De tels lacs à fond plan incliné et à contour en fuseau ou elliptique sont envisagés par HIDAOKA; pour le lac en fuseau, les solutions trouvées dépendent des fonctions de BESSEL, et pour le lac elliptique elles doivent être tabulées spécialement. Nous n'entrerons pas ici dans le détail de ces problèmes; nous nous contenterons de tirer quelques conclusions de cette étude de lacs en fuseau et elliptique, à profondeur constante ou variable.

Le volume d'eau contenu dans les bassins de profondeur constante étant supposé égal à celui des bassins de profondeur variable, on remarque :

1° que les périodes d'oscillation des bassins à fond plan incliné sont toujours plus longues que celles des bassins de profondeur constante, et ceci aussi bien dans le lac rectangulaire que dans le lac elliptique et dans le lac en fuseau.

2° que le rapport T_2/T_1 est toujours supérieur à $1/2$ (sauf pour le lac rectangulaire, où il est égal à $1/2$), quel que soit le type de fond envisagé. Les bassins elliptiques et en fuseau peuvent donc se classer parmi les bassins « concaves » de CHRYSTAL (cf. p. 35).

3° que le rapport des amplitudes de ζ au bout le moins profond à ζ au bout le plus profond (lacs à fond plan incliné) est maximum dans le lac en fuseau et minimum dans le lac rectangulaire.

4° que dans les lacs à fond plan incliné, le nœud du fondamental est le plus proche du centre, dans le cas du lac en fuseau, et qu'il en est le plus éloigné dans le cas du lac rectangulaire.

On voit dès lors qu'à profondeur constante, l'effet d'une variation de largeur est de déplacer le nœud vers l'extrémité la plus large; quant à l'amplitude de la dénivellation ζ , elle sera toujours plus considérable à l'extrémité la plus étroite.

A largeur constante au contraire, l'effet des variations de profondeur est de déplacer le nœud vers l'extrémité la moins profonde; c'est à cette extrémité également que l'amplitude de la dénivellation ζ sera la plus considérable.

Ceci est entièrement conforme aux résultats obtenus précédemment (cf. p. 29).

l) Des conclusions identiques se dégagent de l'étude des lacs de forme dissymétrique autour du centre, auxquels K. HIDAKA consacre également un long article ⁽⁴⁴⁾. La symétrie autour de $x = 0$ est néanmoins conservée. Dans une première catégorie (catégorie « A » de HIDAKA) de ces lacs, la largeur est donnée par

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \frac{x}{a}\right)^p \left(1 + \frac{x}{a}\right)^q,$$

où p et q sont des nombres réels et positifs; on peut sans nuire à la généralité, supposer $p > q$. La seconde catégorie (la catégorie « B » de HIDAKA) comprend les lacs de largeur

$$b(x) = 2b_0 \left(1 - \sin \frac{\pi x}{2a}\right)^{p/2} \left(1 + \sin \frac{\pi x}{2a}\right)^{q/2}.$$

Les figures 2 et 3 qui suivent représentent un certain nombre de lacs de chacune de ces deux catégories.

Quant à la profondeur, elle est prise tantôt constante ($h = h_0$), tantôt variable :

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right); \quad h(x) = h_0 \left(1 \pm \frac{x}{a}\right).$$

Pour les lacs de la catégorie « A » de profondeur constante, l'équation de CHRYSTAL s'écrit (en posant comme d'habitude $x/a = x'$, $\lambda a^2 = \mu$)

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x')^p (1 + x')^q \frac{d\zeta}{dx'} \right] + \mu (1 - x')^p (1 + x')^q \zeta = 0^{(45)}$$

K. HIDAKA calcule numériquement le cas $p = 1$, $q = 1/2$ et est obligé de tabuler la solution, celle-ci n'étant pas réductible à un type connu.

⁽⁴⁴⁾ HIDAKA, K., *The Oscillations of Water in Canals of Asymmetric Plan*, Mem. Imper. Mar. Observ., V, 4 (1935), pp. 268-321.

⁽⁴⁵⁾ Il est à remarquer que cette équation n'est pas réductible à celle de JACOBI :

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x)^p (1 + x)^q (1 - x) x \frac{du}{dx} \right] + \mu (1 - x)^p (1 + x)^q u = 0$$

qui, comme on le sait, admet pour solutions les polynômes de JACOBI d'ordre n : $u = F(p + n, -n, q; x)$, et comme valeurs propres $\mu = n(p + n)$, les conditions-frontière étant : $u(\pm 1) = \text{quantité finie}$.

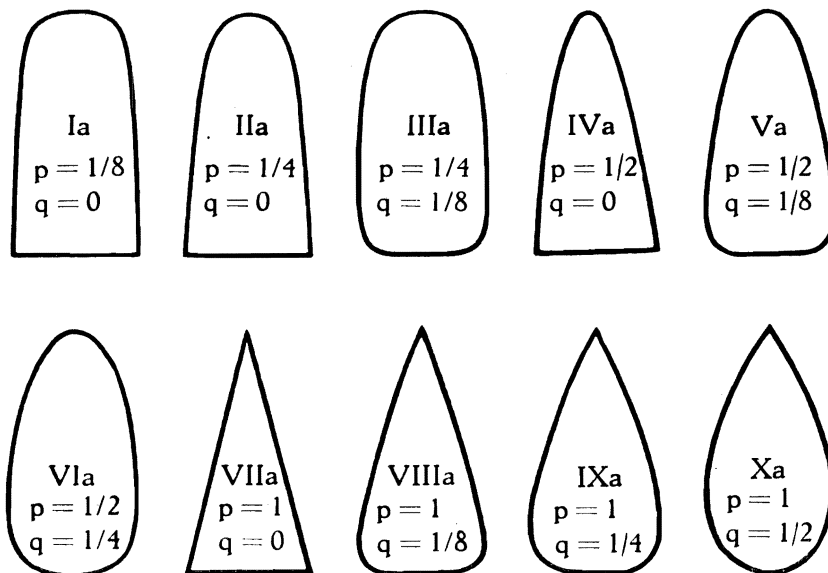


FIG. 2. — Lacs du type « A » de K. HIDAHA.

[D'après l'article cité ci-contre, note 44.]

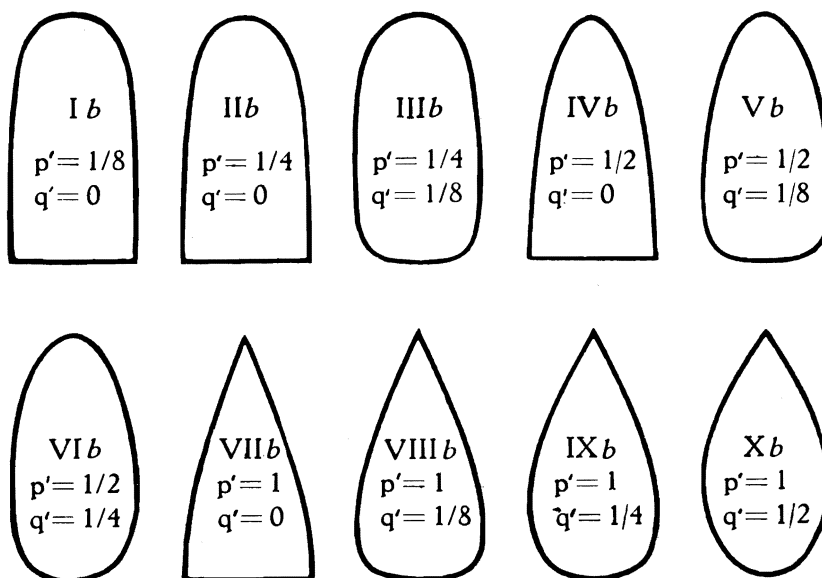


FIG. 3. — Lacs du type « B » de K. HIDAHA.

[Même source.]

Le profil du mode fondamental est représenté par la figure 4 ci-dessous et la valeur propre correspondante est $\sqrt{\mu_1} = 2,030$. Le cas où p est quelconque et $q = 0$ est beaucoup plus aisé à traiter car il conduit à une équation de BESSEL; en effet, l'équation de CHRYSTAL s'écrit alors :

$$(1 - x')\zeta'' - p\zeta' + \mu(1 - x')\zeta = 0$$

et admet par conséquent pour solutions

$$\zeta = A(1 - x')^{-\frac{p-1}{2}} \cdot J_{\frac{p-1}{2}}[\sqrt{\mu}(1 - x')].$$

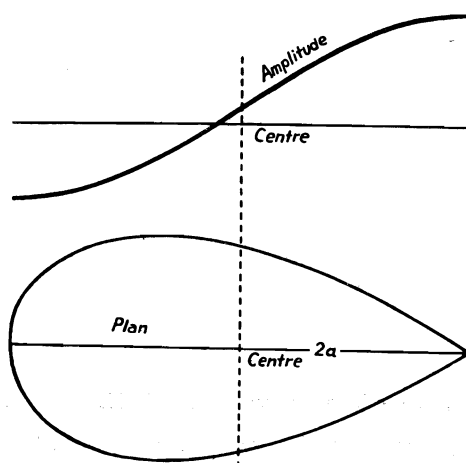


FIG. 4. — Lac du type X_a : $p = 1$, $q = \frac{1}{2}$.

(Profondeur uniforme.)

Profil de la seiche uninodale. [D'après K. HIDAOKA, même article.]

La condition-frontière $\zeta'(1) = \zeta'(-1) = 0$ fournit les valeurs propres du paramètre μ , par l'équation

$$J_{\frac{p+1}{2}}(2\sqrt{\mu}) = 0,$$

car $\zeta'(1) = 0$ est déjà satisfait, et l'on a l'identité

$$\frac{d}{dz} [z^n J_{-n}(z)] = -z^n J_{1-n}(z),$$

d'où l'équation annoncée.

Si $p = 1$ et $q = 0$, on a un lac triangulaire, cas classique bien connu ⁽⁴⁶⁾, pour lequel $\zeta = J_0[\sqrt{\mu}(1 - x')]$, avec comme équation aux valeurs propres $J_1(\sqrt{\mu}) = 0$. On vérifie facilement, à partir des racines $\sqrt{\mu_k} = 3,8317, 7,0156, 10,173, \text{ etc.}$ que $T_1 : T_2 : T_3 = 1 : 0,5461 : 0,3767, \text{ etc.}$ Comme J_0 est maximum pour $x' = 1$, on en conclut que l'amplitude des crêtes et des creux de la seiche décroît à mesure qu'on s'éloigne de l'extrémité effilée du lac.

⁽⁴⁶⁾ Cf. BOUASSE, H., *op. cit.*, p. 157.

Pour p inférieur à 1, K. HIDAOKA donne les quelques résultats numériques (q restant nul) :

$$\begin{array}{ccc} p = 1/8 & 1/4 & 1/2, \\ \sqrt{\mu_1} = 1,614 & 1,654 & 1,745, \\ \sqrt{\mu_2} = 3,189 & 3,261 & 3,508. \end{array}$$

m) Si la profondeur varie comme

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right),$$

l'équation de CHRYSTAL prend à nouveau la forme hypergéométrique :

$$(1 - x'^2) \zeta'' + [(p - q) + (p + q + 2)x'] \zeta' + \mu \zeta = 0,$$

dont les solutions sont

$$\zeta = A \cdot F \left(-k, k + p + q + 1, p + 1; \frac{1 - x'}{2} \right)$$

et les valeurs propres $\mu_k = k(k + p + q + 1)$. Dans le mode fondamental, la surface libre de l'eau reste plane, comme le montre la figure 5 ci-dessous.

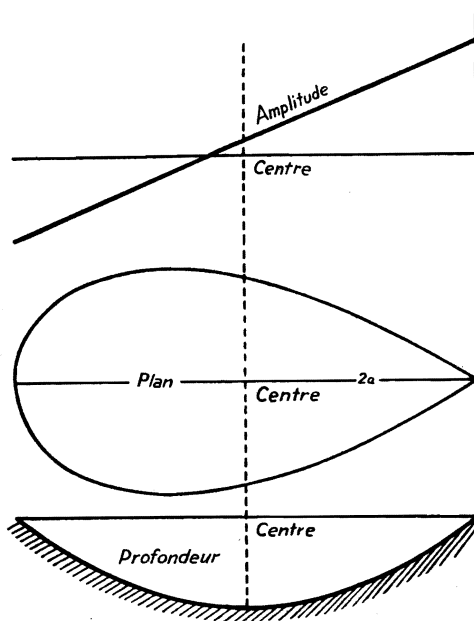


FIG. 5. — Lac du type X_a : $p = 1$, $q = 1/2$.

$$\text{Profondeur } h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right).$$

Profil de la seiche uninode. [D'après K. HIDAOKA, même article.]

n) Si le fond est un plan incliné relevé vers l'extrémité étroite,

$$h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right),$$

les solutions ζ doivent se développer en séries potentielles (puissances paires et impaires) et l'équation aux valeurs propres s'obtient sous forme de fraction continue égalée à zéro.

A titre d'exemple, K. HIDAOKA traite le cas $p = 1$, $q = 1/2$, et trouve pour le fondamental $\sqrt{\mu_1} = 1,865$. Le profil de la seiche est donné par la figure 6 ci-dessous.

Au cas où le fond plan incliné se relève vers l'extrémité large du lac,

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right),$$

l'équation de CHRYSTAL se traite comme dans le cas précédent; pour $p = 1$, $q = 1/2$, K. HIDAOKA trouve $\sqrt{\mu_1} = 1,703$ (c'est-à-dire une période d'oscillation fondamentale plus longue); le profil de la seiche est donné par la figure 7.

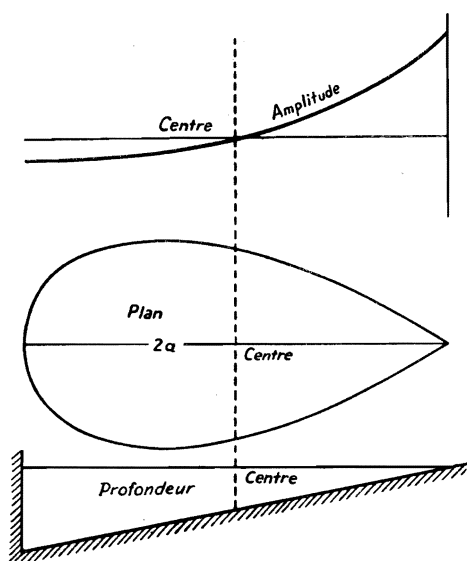


FIG. 6. — Lac du type X_a : $p = 1$, $q = 1/2$.

$$\text{Profondeur } h(x) = h_0 \left(1 - \frac{x}{a} \right).$$

Profils des seiches uninodales. [D'après K. HIDAOKA, même article.]

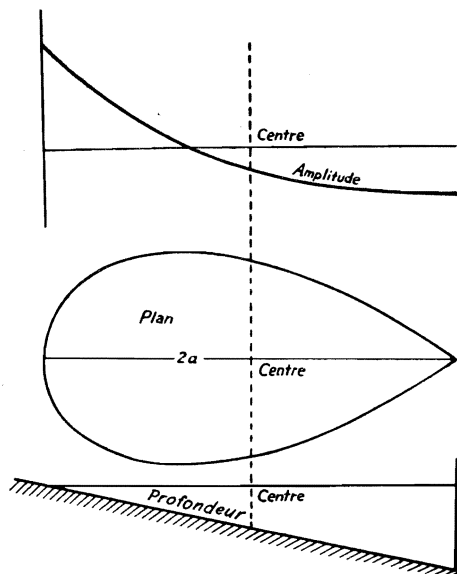


FIG. 7. — Lac du type X_a : $p = 1$, $q = 1/2$.

$$\text{Profondeur } h = h_0 \left(1 + \frac{x}{a} \right).$$

o) Parmi les lacs de la seconde catégorie (« B »), K. HIDAOKA ne traite que le cas de la profondeur constante. Posant

$$1 - \sin \frac{\pi x}{2a} = 2x',$$

l'équation de CHRYSTAL devient :

$$x'(1-x')\zeta'' + \left[\frac{p'+1}{2} - \left(1 + \frac{p'+q'}{2} \right) x' \right] \zeta' + \frac{4\mu}{\pi^2} \zeta = 0.$$

Les solutions sont

$$\zeta = F \left(-k, k + \frac{p'+q'}{2}, \frac{p'+1}{2}; x' \right),$$

et les valeurs propres

$$\sqrt{\mu_k} = \frac{k\pi}{2} \left(1 + \frac{p'+q'}{2k} \right)^{1/2}.$$

Comme on a

$$\sqrt{\mu_k} = \frac{k\pi}{2}$$

pour le canal rectangulaire, on voit que les périodes d'oscillation du canal de catégorie « B » sont plus courtes que celles du canal rectangulaire de même longueur et s'en rapprochent à mesure que le nombre k de nœuds de la seiche croît. Ceci rejoint les conclusions d'une note de H. JEFFREYS sur les seiches d'ordre élevé dans les lacs étroits ⁽⁴⁷⁾.

p) Un grand nombre d'autres lacs aux formes les plus imprévues ont été étudiés par K. HIDAOKA et ses élèves; on trouvera un relevé de ces travaux dans la bibliographie donnée à la fin de cet ouvrage.

Les solutions auxquelles les auteurs aboutissent sont le plus souvent fort compliquées et, en tout cas, ne présentent en général qu'un intérêt pratique assez mince. Aussi n'entrerons-nous pas davantage dans le détail de ces questions et arrêterons-nous ici cette révision rapide des principaux cas aisément solubles de l'équation de CHRYSTAL, pour aborder l'étude des méthodes approchées de solution de cette équation.

CHAPITRE II.

LES MÉTHODES APPROCHÉES.

On a vu au chapitre précédent que l'équation de CHRYSTAL n'admet de solutions exactes que pour un nombre restreint de cas, que ceux-ci comprennent seulement les lacs dont la forme présente une certaine symétrie, et que même pour de tels lacs les solutions sont souvent compliquées. Aussi s'est-on depuis longtemps occupé de mettre au point des méthodes de calcul approché, permettant de résoudre numériquement l'équation de CHRYSTAL pour n'importe quel lac (pourvu seulement que le rapport de ses dimensions et sa configuration géographique et bathymétrique ne s'opposent pas à l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides).

Ces méthodes, que pour la facilité et conformément à l'habitude établie nous désignerons ici du nom des auteurs qui les ont proposées ou appliquées les premiers, ne sont le plus souvent que des adaptations, à l'équation différentielle dont il est question ici, de procédés d'intégration très généraux, connus depuis longtemps des mathématiciens.

On passera ainsi en revue successivement : une méthode variationnelle, deux méthodes « d'existence », une méthode utilisant l'analogie qui existe entre les oscillations d'un système mécanique et celles d'un circuit électrique, deux méthodes fondées sur la transformation d'une équation différentielle linéaire du second ordre en une équation intégrale, une méthode plus ou moins hybride mais qui se ramène pour l'essentiel à l'une de ces deux dernières; enfin, un procédé de correction applicable à la formule de MERIAN pour les golfes et baies.

⁽⁴⁷⁾ JEFFREYS, H., *On the More Rapid Longitudinal Seiches of a Narrow Lake*, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Geoph. Supp., 1 (1928), pp. 495-500.