

pour le canal rectangulaire, on voit que les périodes d'oscillation du canal de catégorie « B » sont plus courtes que celles du canal rectangulaire de même longueur et s'en rapprochent à mesure que le nombre k de nœuds de la seiche croît. Ceci rejoint les conclusions d'une note de H. JEFFREYS sur les seiches d'ordre élevé dans les lacs étroits ⁽⁴⁷⁾.

p) Un grand nombre d'autres lacs aux formes les plus imprévues ont été étudiés par K. HIDAOKA et ses élèves; on trouvera un relevé de ces travaux dans la bibliographie donnée à la fin de cet ouvrage.

Les solutions auxquelles les auteurs aboutissent sont le plus souvent fort compliquées et, en tout cas, ne présentent en général qu'un intérêt pratique assez mince. Aussi n'entrerons-nous pas davantage dans le détail de ces questions et arrêterons-nous ici cette révision rapide des principaux cas aisément solubles de l'équation de CHRYSTAL, pour aborder l'étude des méthodes approchées de solution de cette équation.

CHAPITRE II.

LES MÉTHODES APPROCHÉES.

On a vu au chapitre précédent que l'équation de CHRYSTAL n'admet de solutions exactes que pour un nombre restreint de cas, que ceux-ci comprennent seulement les lacs dont la forme présente une certaine symétrie, et que même pour de tels lacs les solutions sont souvent compliquées. Aussi s'est-on depuis longtemps occupé de mettre au point des méthodes de calcul approché, permettant de résoudre numériquement l'équation de CHRYSTAL pour n'importe quel lac (pourvu seulement que le rapport de ses dimensions et sa configuration géographique et bathymétrique ne s'opposent pas à l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides).

Ces méthodes, que pour la facilité et conformément à l'habitude établie nous désignerons ici du nom des auteurs qui les ont proposées ou appliquées les premiers, ne sont le plus souvent que des adaptations, à l'équation différentielle dont il est question ici, de procédés d'intégration très généraux, connus depuis longtemps des mathématiciens.

On passera ainsi en revue successivement : une méthode variationnelle, deux méthodes « d'existence », une méthode utilisant l'analogie qui existe entre les oscillations d'un système mécanique et celles d'un circuit électrique, deux méthodes fondées sur la transformation d'une équation différentielle linéaire du second ordre en une équation intégrale, une méthode plus ou moins hybride mais qui se ramène pour l'essentiel à l'une de ces deux dernières; enfin, un procédé de correction applicable à la formule de MERIAN pour les golfes et baies.

⁽⁴⁷⁾ JEFFREYS, H., *On the More Rapid Longitudinal Seiches of a Narrow Lake*, Monthly Not. Roy. Astr. Soc., Geoph. Supp., 1 (1928), pp. 495-500.

§ 1. LA MÉTHODE VARIATIONNELLE DE W. RITZ — K. HIDAHA.

La méthode bien connue de W. RITZ a été appliquée par K. HIDAHA ⁽⁴⁸⁾ à la résolution de l'équation de CHRYSTAL. Rappelons brièvement le procédé de W. RITZ, et, pour plus de clarté, raisonnons directement sur cette dernière équation.

On sait que l'intégration de l'équation

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0, \quad (\text{I.10})$$

sous les conditions $u(0) = u(a) = 0$, revient à minimiser l'intégrale

$$I = \int_0^a \left[u'^2 - \frac{\lambda}{\sigma(v)} u^2 \right] dv,$$

c'est-à-dire à annuler sa variation :

$$\delta I \equiv \delta \int_0^a \left[u'^2 - \frac{\lambda}{\sigma(v)} u^2 \right] dv = 0. \quad (\text{II.1})$$

En effet, l'équation d'EULER de ce dernier problème n'est autre que l'équation de CHRYSTAL (I.10). De là l'idée de W. RITZ : au lieu de résoudre l'équation (I.10) soumise aux conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, il cherche pour (II.1) des solutions sous forme d'une combinaison linéaire de m fonctions $\psi_i(v)$, satisfaisant chacune aux conditions susdites. A cet effet, il pose

$$u(v) = \sum_{i=1}^m A_i \psi_i(v),$$

où les A_i sont des paramètres à déterminer. L'existence d'un tel système de fonctions $\psi_i(v)$, pour lesquelles on doit avoir (ε étant un nombre positif aussi petit qu'on veut, et m un entier positif) :

$$\left| u(v) - \sum_{i=1}^m A_i \psi_i(v) \right| < \varepsilon, \quad \left| u'(v) - \sum_{i=1}^m A_i \psi_i'(v) \right| < \varepsilon,$$

dans tout le domaine du problème, est garantie par un théorème de WEIERSTRASS ⁽⁴⁹⁾, et W. RITZ lui-même a indiqué la manière de former ces fonctions. Pour toutes les autres questions concernant la légitimité du procédé

⁽⁴⁸⁾ HIDAHA, K., *Application of Ritz's Variation Method to the Determination of Seiches in a Lake*, Mem. Imp. Mar. Obs., VI, 2 (1936), pp. 159-174.

⁽⁴⁹⁾ Cf. PLANCHEREL, M., *Sur la méthode d'intégration de Ritz*, Bull. Sc. Math., 58 (1923), pp. 376-412; voir la p. 377.

de RITZ, la convergence des valeurs propres etc., on se reportera à l'article de M. PLANCHEREL, cité dans la note 49.

Introduisant cette expression de $u(v)$ dans (II.1), il vient

$$\delta I \equiv \varepsilon \int_0^a \left[(\Sigma A_i \psi_i)^2 - \frac{\lambda}{\sigma(v)} (\Sigma A_i \psi_i)^2 \right] dv = 0, \quad (\text{II.2})$$

équation qui se réduit aux m équations suivantes :

$$\frac{\partial I}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial A_2} = 0 \dots \frac{\partial I}{\partial A_m} = 0,$$

c'est-à-dire à un système de m équations à m inconnues A_i ($i = 1, 2, \dots, m$) dont la solution permet d'écrire l'approximation cherchée pour $u(v)$. Les équations $\partial I / \partial A_i = 0$ étant linéaires en A_j , et sans second membre, elles n'auront de solutions A_i non identiquement nulles que si leur déterminant, que nous écrirons $D|C_{ij} - \lambda E_{ij}|$, s'annule. (On a posé

$$\int_0^a \psi_i \psi_j dv = C_{ij} \quad \text{et} \quad \int_0^a \frac{\psi_i \psi_j}{\sigma(v)} dv = E_{ij},$$

i étant l'indice des rangées et j celui des colonnes.)

Ce déterminant peut être lui-même considéré comme une équation d'ordre m en λ , dont la solution fournira les valeurs propres et, par suite, les périodes d'oscillation cherchées. A chaque racine λ_k ($k = 1, 2, \dots, m$) correspond un système de coefficients A_1, A_2, \dots, A_m , et par conséquent une fonction $u_k(v)$.

Si, au lieu de partir de l'équation (I.10), nous partons de l'équation (I.11) c'est-à-dire

$$\frac{d^2 \zeta}{ds^2} + \lambda \sigma(s) \zeta = 0,$$

avec les conditions-frontière $\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0$, l'intégrale à minimiser sera

$$J = \int_0^c [\zeta'^2 - \lambda \sigma(s) \zeta^2] ds; \quad (\text{II.1}')$$

et l'on écrira

$$\zeta(s) = \sum_{i=1}^m B_i \varphi_i(s),$$

les B_i étant maintenant les paramètres à déterminer.

Les équations résultant de l'annulation de la variation de J sont

$$\frac{\partial J}{\partial B_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, m)$$

et la condition de comptabilité du système s'écrira $D|F_{ij} - \lambda G_{ij}| = 0$, où l'on

a posé

$$\int_0^c \varphi_i \varphi_j \sigma(s) ds = G_{ij} \quad \text{et} \quad \int_0^c \varphi'_i \varphi'_j ds = F_{ij}.$$

Le raisonnement général est donc en tous points identique à celui qui vient d'être fait pour l'équation (I.10).

K. HIDAOKA raisonne uniquement sur l'équation (I.10) et pose ⁽⁵⁰⁾

$$\psi_i(v) = \left(1 - \frac{v}{a}\right) \cdot \left(\frac{v}{a}\right)^i,$$

ou, en écrivant v' pour v/a ,

$$\psi_i(v') = (1 - v') \cdot v'^i,$$

de manière à satisfaire immédiatement aux conditions-frontière $\psi_i(0) = \psi_i(a) = 0$. On vérifie également que pour cette forme particulière des ψ_i , les quantités C_{ij} et E_{ij} ne dépendent que de la somme $i + j$, de sorte que pour $m = 2$ il n'y a que trois intégrales C_{ij} et trois intégrales E_{ij} à calculer; pour $m = 3$, ce nombre est de cinq, pour $m = 4$, de sept, et ainsi de suite. Les intégrales C_{ij} s'obtiennent immédiatement sans aucune difficulté, puisque l'intégrande s'y réduit à un polynôme, tandis que les intégrales E_{ij} , dont l'intégrande contient $\sigma(v)$ en dénominateur, doivent être calculées par des procédés numériques. On a, en posant $i + j = n$ et $i \times j = r$:

$$C_{ij} = \int_0^a [(r + n + 1) v'^n - (2r + 3n + 4) v'^{n+1} + (r + 2n + 2) v'^{n+2}] dv,$$

$$E_{ij} = \int_0^a \frac{(1 - v')^2 v'^{n+2}}{\sigma(v)} dv.$$

Les fonctions $\psi_i(v)$ choisies par K. HIDAOKA présentent l'inconvénient de ne pas avoir leurs dérivées orthogonales entre elles, ce qui donnerait, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \psi'_i \psi'_j dv = 0 \text{ ou } 1 \text{ suivant que } i \neq j \text{ ou } i = j;$$

cette simple précaution permettrait, après division du déterminant-équation aux valeurs propres par λ^m (quantité non nulle !), de faire prendre à celui-ci la forme séculaire (la nouvelle inconnue étant $1/\lambda$), beaucoup plus maniable que celle dont tous les éléments sont des binômes du type $C_{ij} - \lambda E_{ij}$.

⁽⁵⁰⁾ HIDAOKA, K., *op. cit.*, p. 162.

Si l'on prend par exemple pour l'équation (II.2)

$$\psi_i(v) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \sin \frac{i\pi v}{a},$$

à quoi correspond, pour sa variante :

$$\varphi_i(s) = \frac{1}{\sqrt{i\pi}} \cos \frac{i\pi v}{a},$$

on est assuré, non seulement d'avoir des dérivées orthogonales entre elles, mais encore, au cas où la fonction $\sigma(v)$ [ou $\sigma(s)$] ne présente pas une allure par trop capricieuse, de représenter en même temps le fondamental, et peut-être aussi le deuxième mode, d'une manière vraisemblablement plus correcte que par les polynômes proposés par K. HIDAKA. On sait en effet que les fonctions

$$u_k = \sin \frac{k\pi v}{a} \quad \text{et} \quad \zeta_k = \cos \frac{k\pi v}{a}$$

sont des solutions exactes pour un lac-canal de profondeur et de largeur constantes, alors que les polynômes de HIDAKA ne sont solutions exactes pour aucune forme simple de lac-canal.

Pour ce qui est du point de vue pratique, on sait que la méthode de W. RITZ, à cause du point de vue même où son auteur s'est placé (satisfaire d'abord aux conditions-frontière et ensuite seulement à l'équation qu'on s'efforce de résoudre), ne donne habituellement de bons résultats numériques que pour la valeur propre la plus basse, et qu'elle est inutilisable pour les valeurs propres d'ordre élevé.

Signalons aussi la propriété très importante que possèdent les valeurs propres approchées $\Lambda_1, \Lambda_2 \dots$ fournies par cette méthode de constituer des approximations par excès : on a toujours (en désignant par $\lambda_1, \lambda_2, \text{etc.}$, les valeurs propres exactes) $\Lambda_1 \geq \lambda_1, \Lambda_2 \geq \lambda_2 \dots \text{etc.}$

La démonstration de cette propriété, qui repose sur le principe de maximum-minimum de R. COURANT, est donnée dans la plupart des traités classiques; il est donc superflu de la reprendre ici ⁽⁵¹⁾.

On sait encore que si l'on a obtenu des valeurs approchées $\Lambda_1 \dots \Lambda_m$ pour les m premières valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_m$ à partir d'une combinaison linéaire de m fonctions d'essai ψ_i , en posant

$$u = \sum_{i=1}^m A_i \psi_i$$

⁽⁵¹⁾ Cf. par exemple COURANT, R. und HILBERT, D., *Methoden der Math. Physik*, I, pp. 27 sqq; COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme und ihre Numerische Behandlung*, pp. 236 sqq.

et que si l'on adjoigne à ces dernières une fonction d'essai supplémentaire ψ_{m+1} de manière à poser maintenant

$$u = \sum_{i=1}^{m+1} A_i \psi_i,$$

les nouvelles valeurs approchées $\Lambda'_1 \dots \Lambda'_{m+1}$ des $m+1$ premières valeurs propres $\lambda_1 \dots \lambda_{m+1}$ sont séparées par les m valeurs propres approchées $\Lambda_1 \dots \Lambda_m$ obtenues précédemment. On a donc

$$\Lambda'_1 \leq \Lambda_1 \leq \Lambda'_2 \leq \Lambda_2 \leq \dots \leq \Lambda'_m \leq \Lambda_m \leq \Lambda'_{m+1}.$$

Les valeurs approchées Λ_i et Λ'_i étant toujours $\geq \lambda_i$ (valeurs propres exactes), on en conclut que les Λ'_i seront en général de meilleures approximations que les Λ_i , et qu'il suffirait en théorie de prendre m suffisamment élevé pour obtenir les valeurs propres du problème avec telle approximation que l'on voudrait. Malheureusement, le déterminant-équation aux périodes devient de moins en moins maniable à mesure que son ordre croît, ce qui limite considérablement l'intérêt pratique de cette dernière propriété des valeurs propres approchées.

Enfin, une limite inférieure pour une valeur propre quelconque λ_k peut être obtenue à l'aide du « quotient de TEMPLE », dès que l'on connaît pour la valeur propre λ_{k+1} , une limite inférieure $\lambda'_{k+1} > \lambda_k$ lui-même.

Cette dernière propriété n'est citée que pour mémoire et ne sera pas utilisée dans ce travail, pour des raisons pratiques ⁽⁵²⁾.

§ 2. LA MÉTHODE « D'EXISTENCE » DE A. DEFANT.

Au lieu de s'attaquer directement à l'équation de CHRYSTAL, A. DEFANT ⁽⁵³⁾ calcule, à l'aide des équations de continuité et du mouvement, les grandeurs $u(v)$, ξ et ζ ; la valeur propre inconnue λ est remplacée par une valeur d'essai λ' , qui sera considérée comme satisfaisante dès que $u(v)$, pris nul en $v = 0$, prend une valeur suffisamment voisine de zéro au point $v = a$. L'équation de CHRYSTAL étant du type des équations de STURM-LIOUVILLE, l'existence de la solution

⁽⁵²⁾ Pour la théorie du « quotient de TEMPLE », cf. :

TEMPLE, G., *The Accuracy of Rayleigh's Method...*, Proc. Roy. Soc. London, Series A (Math. Phys. Sc.), 211 (1952), pp. 204-224;

COLLATZ, L., *Numer. Behndl. von Diffgl.*, pp. 172 sqq.

Pour les propriétés des valeurs Λ'_i et Λ_i , voir notamment :

PAULING, L. and WILSON, E. B., *Introduction to Quantum Mechanics*, pp. 186 sqq;

KEMBLE, E., *Fundamental Principles of Quantum Mechanics*, pp. 410 sqq.

⁽⁵³⁾ DEFANT, A., *Neue Methode zur Ermittlung der Eigenschwingungen* (« Seiches ») *von Abgeschlossenen Wassermassen*, Ann. Hydrographie, 46 (1918), pp. 78-85. Cet exposé est repris plusieurs fois dans les articles de P. CALOI et ses élèves, parus dans les *Annali di Geofisica* : cf. p. ex. 1 (1948), pp. 190-195; 2 (1949), pp. 267-280; 4 (1951), pp. 411-418, etc.

(d'où le nom donné ici à la méthode), est garantie par les théorèmes généraux relatifs à ce type d'équation ⁽⁵⁴⁾; étant donné par ailleurs la signification physique de l'équation (I.10), cette existence ne saurait faire de doute. Quant à la méthode elle-même, elle consiste à construire les solutions point par point, de manière à satisfaire partout aux équations de continuité et de mouvement, et par suite, à l'équation de CHRYSTAL, qui résulte de l'élimination de ζ entre celles-ci. Quant à la difficulté principale, celle de satisfaire simultanément aux deux conditions-frontière, elle est résolue par tâtonnements : on recommence les calculs jusqu'à ce que la solution essayée donne satisfaction sur ce dernier point.

Considérons l'équation de continuité

$$\zeta = -\frac{1}{b(x)} \frac{d}{dx} [S(x) \xi] \quad (\text{I.8})$$

et l'équation du mouvement

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (\text{I.9})$$

ou, puisque $\xi \sim e^{i\omega t}$,

$$\frac{d\zeta}{dx} = \lambda \xi \quad (\lambda = \omega^2/g). \quad (\text{I.9}')$$

Divisons le lac en n tronçons au moyen de n sections transversales S_j aux points $x = x_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$); soient Δx_j les portions d'axe Ox et Δv_j les portions de surface libre comprises entre les sections S_j et S_{j-1} ; u_j est le volume d'eau qui, en un quart de période d'oscillation (à savoir l'intervalle de temps qui s'écoule entre le passage de la surface libre par sa position d'équilibre et le moment où elle atteint sa dénivellation maximum) peut être considéré comme passant à travers la section S_j (supposée fixe). Les équations (I.8) et (I.9) deviennent alors respectivement

$$\zeta_{j-1} = -\frac{\Delta u_j}{\Delta v_j} \quad \text{et} \quad \lambda \xi_j = \frac{\Delta \zeta_j}{\Delta x_j}.$$

Puisque pour les ondes de grande longueur que sont les seiches étudiées, ζ varie très lentement avec x , on peut supposer constante la valeur de la dénivellation entre les deux sections S_{j-1} et S_j ; soit ζ_{j-1} cette valeur.

De cette manière, la surface de l'eau en oscillation est représentée par des gradins en nombre n .

Cette approximation sera naturellement d'autant plus exacte que les sections seront plus rapprochées, c'est-à-dire que n sera plus grand.

On peut encore raffiner le procédé en opérant comme suit : on prend d'abord ζ_1 constant de la première à la deuxième section et à l'aide de cette valeur on calcule successivement ξ_1 , $\Delta \zeta_2$ et ζ_2 ; on recommence ensuite le calcul en remplaçant ζ_1 par $\frac{1}{2} (\zeta_1 + \zeta_2)$; le $\Delta \zeta_2$ ainsi obtenu sera plus précis que le précédent;

⁽⁵⁴⁾ Cf. INCE, E. L., *Ordin. Differ. Equations*, chap. X, pp. 223 sqq.

il suffit de recommencer jusqu'à ce que le $\Delta\zeta_2$ ne change pratiquement plus. Néanmoins, il faut remarquer qu'à cause des erreurs de mesure inévitables sur Δv_j et Δx_j , l'amélioration obtenue par ce procédé d'itération pourra être illusoire et ne pas justifier le supplément de travail qui en résulte pour les calculs numériques. L'intégration numérique s'effectue en commençant par une valeur arbitraire ζ_0 attribuée à la dénivellation depuis le point $x = 0$ (rivage du lac) jusqu'au point $x = x_1$, c'est-à-dire dans le premier compartiment (compris entre la côte S_0 et la première section droite S_1). On calcule ensuite, de compartiment en compartiment, les grandeurs u_j , ξ_j , ζ_j selon le schéma :

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1} &= u_j - \zeta_j \Delta v_{j+1}; \\ u_j &\equiv \sum_{i=1}^j \Delta u_i = - \sum_{i=1}^j \zeta_{i-1} \Delta v_i; \\ \xi_j &= u_j / S_j; \quad \Delta\zeta_j = \lambda \xi_j \Delta x_j; \\ \zeta_j &= \zeta_{j-1} + \Delta\zeta_j. \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3})$$

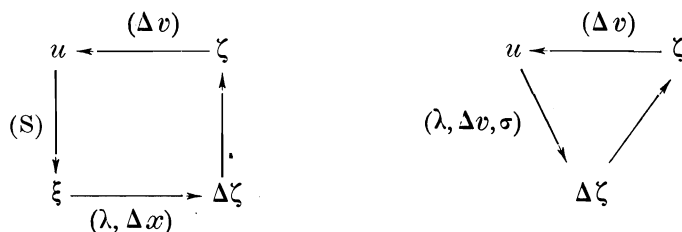
Ce schéma peut se simplifier comme suit, en observant que

$$\frac{d\zeta}{b(x) dx} \equiv \frac{d\zeta}{dv} = \frac{\lambda u}{\sigma(v)};$$

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1} &= u_j - \zeta_j \Delta v_{j+1}; \\ u_j &= \sum_{i=1}^j \Delta u_i = - \sum_{i=1}^j \zeta_{i-1} \Delta v_i; \\ \Delta\zeta_j &= \lambda \frac{u_j}{\sigma_j} \Delta v_j; \\ \zeta_j &= \zeta_{j-1} + \Delta\zeta_j. \end{aligned} \right\}$$

Mais sous cette forme, les calculs ne fournissent plus la fonction auxiliaire ξ , dont on verra plus loin l'intérêt pour la vérification de l'orthogonalité des fonctions propres $u(v)$ obtenues (cf. pp. 98 sqq.).

Les enchaînements des calculs peuvent se représenter, respectivement pour la méthode de DEFANT et sa variante simplifiée, par les « circuits » suivants :



La condition-frontière $u(a) = 0$ sera remplie si l'on a

$$u_n \equiv \sum_{i=1}^n \zeta_{i-1} \Delta v_i = 0.$$

Habituellement, pour une valeur d'essai $\lambda = \lambda'$, cette condition n'est pas remplie exactement et l'on trouve $u_n \neq 0$. Dans ce cas, on recommence avec une nouvelle valeur d'essai λ'' ; des interpolations, effectuées sur les valeurs d'essai, conduisent ensuite rapidement à un résultat satisfaisant.

Le même procédé peut s'appliquer à l'équation (I.11), c'est-à-dire

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \lambda\sigma(s)\zeta = 0$$

[conditions-frontière : $\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0$], préalablement décomposée en $\lambda u = d\zeta/ds$ (équation du mouvement) et $u = -\int_0^s \sigma(s)\zeta ds$ (équation de continuité).

Rappelons que la variable s est définie par la relation

$$s = \int_0^v \frac{dv}{\sigma(v)}$$

et que c est la valeur prise par s au point $v = a$:

$$c = \int_0^a \frac{dv}{\sigma(v)}$$

Les conditions-frontière peuvent donc s'écrire : $u(0) = u(c) = 0$.

Aux cinq relations (II.3) ci-dessus correspondent dès lors respectivement les cinq relations suivantes :

$$\left. \begin{aligned} u_{j+1} &= u_j - \zeta_j \sigma_{j+1} \Delta s_{j+1}; \\ u_j &\equiv \sum_{i=1}^j \Delta u_i = - \sum_{i=1}^j \zeta_{i-1} \sigma_i \Delta s_i; \\ \xi_j &= u_j / S_j; \quad \Delta \zeta_j = \lambda u_j \Delta s_j; \\ \zeta_j &= \zeta_{j-1} + \Delta \zeta_j, \end{aligned} \right\} \quad (\text{II.3}')$$

dont la troisième ne sera pas utilisée dans les calculs.

Ainsi qu'on l'a signalé plus haut (cf. p. 26), il faut s'attendre à un léger désaccord entre les résultats obtenus par la méthode de DEFANT appliquée à l'équation (I.10) (schéma II.3) et ceux fournis par l'équation (I.11) (schéma II.3'). Cela tient essentiellement à ce que $b(x)\Delta x$ n'est égal à Δv que si l'on prend un $b(x)$ moyen, défini par $\Delta v / \Delta x$, qu'on écrira désormais $\beta(x)$; or, pour la construction de la courbe normale, $b(x)$ est habituellement mesuré au même point que $S(x)$ — ainsi qu'il est naturel à première vue de le faire; — du point de vue théorique, l'anomalie n'est pas plus grave que celle qui consiste à remplacer des différentielles par des différences finies. Pour faire disparaître le désaccord en question, il suffit évidemment de remplacer $\sigma(x)$ [défini par la relation $\sigma(v) = S(v) b(x)$] par $\tau(v) = S(v) \beta(v)$, c'est-à-dire de faire usage de la courbe normale « corrigée ». Nous avons vu plus haut ce qu'il faut penser de cette courbe corrigée (cf. pp. 25-26).

La méthode est encore applicable à la recherche des seiches dans un golfe ou une baie à large embouchure, à condition de remarquer que la condition-

frontière à l'embouchure est $\zeta = 0$; c'est la masse d'eau u_0 qui traverse l'embouchure (S_0) pendant un quart de période qui sera choisie arbitrairement. Le schéma du calcul numérique est analogue en tous points à celui donné ci-dessus. J. GOLDBERG ⁽⁵⁵⁾, qui, semble-t-il, a le premier utilisé cette variante de la méthode de DEFANT pour le calcul des oscillations libres dans les golfes et les baies, y apporte une légère modification : au lieu de sommer u_j par rectangles (comme le fait DEFANT) il préfère opérer par trapèzes, ce qui le conduit à écrire :

$$u_{j+1} = u_j - \frac{1}{2} (\zeta_j + \zeta_{j+1}) \Delta v_{j+1},$$

d'où, pour la condition-frontière en $v = a$:

$$u_n = u_0 - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} (\zeta_i + \zeta_{i+1}) \Delta v_{i+1} = 0.$$

Cette intégration par trapèzes pourra être préférable si le nombre de sections droites est assez réduit.

Remarquons encore pour terminer que ces méthodes d'existence, quel que soit du reste le procédé d'intégration utilisé, sont extrêmement commodes pour les calculs à la machine. Le caractère quelque peu rudimentaire des procédés d'intégration mis en œuvre dans ces diverses méthodes se justifie si l'on remarque que les Δx_j (mesurés le long du Talweg, c'est-à-dire le long d'une ligne assez mal définie), les Δv_j (mesurés sur une carte, au planimètre ou par des procédés moins précis) et surtout les S_j , sont des données entachées d'erreurs de mesure qui peuvent atteindre plusieurs pour cent (que l'on songe à la part d'arbitraire inévitable que comportent les rognages éventuels ! cf. p. 91); cela n'aurait donc pas beaucoup de sens de recourir à des procédés d'intégration raffinés lorsque l'on ne possède que des données d'une précision médiocre.

§ 3. LES MÉTHODES DE W. E. MILNE.

a) Au lieu de procéder comme pour la méthode d'existence de A. DEFANT, qui utilise en chaîne l'équation de continuité (I.8) et l'équation du mouvement (I.9), on peut aussi s'attaquer directement à l'équation de CHRYS TAL (I.10), à l'aide de formules donnant d^2u/dv^2 en fonction de valeurs prises par la fonction u en divers points voisins, et de Δv (pris constant) comme par exemple ⁽⁵⁶⁾ :

$$u_n'' = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{1}{12} \Delta v^2 u_n^{IV} + \dots$$

⁽⁵⁵⁾ GOLDBERG, J., *Zur Berechnung der freien Schwingungen von Meeresbuchten*, Ann. der Hydrogr., 65 (1937), pp. 419-422.

⁽⁵⁶⁾ Cf. MILNE, W. E., *Numerical Calculus*, Princeton (N. J.), 1949, pp. 138 sqq.

Dans cette formule, on peut, en première approximation, négliger le terme en u_n^{IV} , ce qui conduit à la relation

$$u_n'' = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1})$$

dont on élimine la dérivée seconde à l'aide de l'équation de CHRYSTAL elle-même; on obtient ainsi :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} + \frac{\lambda \Delta v^2}{\sigma_n} u_n = 0. \quad (\text{II.4})$$

On peut aussi itérer la formule, ce qui donne

$$\begin{aligned} u_n^{IV} &= \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') - \frac{1}{12} \Delta v^2 u_n^{VI} + \dots \\ u_n^{VI} &= \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}^{IV} - 2u_n^{IV} + u_{n-1}^{IV}) - \frac{1}{12} \Delta v^2 u_n^{VIII} + \dots \text{ etc.} \end{aligned}$$

Introduisons cette valeur de u_n^{IV} dans l'équation ci-dessus : il vient

$$u_n'' = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{1}{12} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') + \frac{1}{144} \Delta v^4 u_n^{VI} + \dots$$

Éliminons les u'' à l'aide de l'équation de CHRYSTAL et négligeons le terme u_n^{VI} : il reste

$$u_{n+1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}} \right) - u_n \left(2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n} \right) + u_{n-1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}} \right) = 0. \quad (\text{II.5})$$

Introduisons ensuite u_n^{VI} dans l'expression donnant u_n^{IV} : il vient comme précédemment

$$u_n^{IV} = \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') - \frac{1}{12} (u_{n+1}^{IV} - 2u_n^{IV} + u_{n-1}^{IV}) + \frac{1}{144} \Delta v^4 u_n^{VIII} + \dots$$

relation dont on peut à nouveau éliminer les u^{IV} ; on obtient ainsi :

$$\begin{aligned} u_n^{IV} &= \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') - \frac{1}{12} \left\{ \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+2}'' - 2u_{n+1}'' + u_n'') - \dots - \frac{2}{\Delta v^2} (u_{n+1}'' - 2u_n'' \right. \\ &\quad \left. + u_{n-1}'') + \dots + \frac{1}{\Delta v^2} (u_n'' - 2u_{n-1}'' + u_{n-2}'') - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Introduisons cette dernière égalité dans la relation donnant u_n'' : il vient

$$\begin{aligned} u_n'' &= \frac{1}{\Delta v^2} (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) - \frac{1}{12} (u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') + \frac{1}{144} \left\{ (u_{n+2}'' - 2u_{n+1}'' + u_n'') - \dots \right. \\ &\quad \left. - 2(u_{n+1}'' - 2u_n'' + u_{n-1}'') + \dots + (u_n'' - 2u_{n-1}'' + u_{n-2}'') - \dots \right\}. \end{aligned}$$

Éliminons encore les dérivées secondes à l'aide de l'équation de CHRYSTAL elle-même : il reste

$$-\frac{\lambda \Delta v^2 u_n}{\sigma_n} = (u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}) + \frac{\lambda \Delta v^2}{12} \left(\frac{u_{n+1}}{\sigma_{n+1}} - \frac{2u_n}{\sigma_n} + \frac{u_{n-1}}{\sigma_{n-1}} \right) \\ + \frac{\lambda \Delta v^2}{144} \left(-\frac{u_{n+2}}{\sigma_{n+2}} + \frac{16u_{n+1}}{\sigma_{n+1}} - \frac{30u_n}{\sigma_n} + \frac{16u_{n-1}}{\sigma_{n-1}} - \frac{u_{n-2}}{\sigma_{n-2}} \right),$$

relation entre cinq valeurs (d'abscisses équidistantes entre elles) de la fonction $u(v)$, comparable à ce point de vue à la relation que l'on obtient en éliminant u^{IV} au moyen de la relation bien connue ⁽⁵⁷⁾

$$u_n^{IV} = \frac{1}{\Delta v^4} (u_{n+2} - 4u_{n+1} + 6u_n - 4u_{n-1} + u_{n-2}) - \frac{\Delta v^2}{6} u_n^{VI} + \dots$$

En effet, cette relation permet d'écrire

$$u_n'' = \frac{1}{12 \Delta v^2} (-u_{n+2} + 16u_{n+1} - 30u_n + 16u_{n-1} - u_{n-2}).$$

L'inconvénient pratique des formules « à cinq points » (et davantage) est qu'elles nécessitent des précautions spéciales pour les valeurs de départ; ces valeurs doivent être calculées avec grande précision, sans quoi les solutions auxquelles elles conduisent peuvent s'écarter rapidement des solutions correctes, de sorte que le supplément de précision auquel on pouvait s'attendre n'est pas atteint, malgré les calculs beaucoup plus longs nécessités par ces formules.

C'est pourquoi on s'en tiendra ici aux deux formules

$$u_{n+1} = 2u_n - u_{n-1} - \frac{\lambda \Delta v^2}{\sigma_n} u_n; \quad (\text{II.4})$$

$$\left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}}\right) u_{n+1} = \left(2 - \frac{10 \lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n}\right) u_n - \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}}\right) u_{n-1}. \quad (\text{II.5})$$

Pour le calcul numérique à l'aide de ces formules, on se donne arbitrairement une valeur initiale u_1 ; en vertu de la première condition-frontière, $u_0 = 0$. On dispose ainsi de deux valeurs de départ pour lesquelles aucune correction n'est nécessaire et à l'aide desquelles on peut trouver successivement u_2, u_3 , etc.

Pour la valeur propre λ , on choisit une valeur d'essai; celle-ci sera considérée comme satisfaisante lorsque la seconde condition-frontière $u(a) = 0$ sera remplie avec une approximation suffisante; tant que cette condition n'est pas remplie, on ajuste λ et on recommence les essais.

Un inconvénient relatif de la présente manière de procéder provient de la nécessité de prendre Δv constant.

En effet, s'il est facile, sur la carte d'un lac, de pratiquer des sections $S(x)$ équidistantes sur le Talweg, c'est-à-dire de prendre Δx constant, il est plus compliqué de prendre

⁽⁵⁷⁾ Cf. COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme...*, p. 272.

Δv constant, à cause des irrégularités du contour, d'autant plus que le Talweg n'est en général pas rectiligne : les portions de surface libre seront donc en général des polygones ayant pour côtés deux segments de droite (les traces des sections droites) orthogonaux au Talweg et deux arcs de courbe (les rives du lac). On voit la difficulté pratique qu'il y aurait à ajuster ces sections droites (non parallèles en général !) de manière à conserver un Δv constant.

On peut évidemment tourner la difficulté en construisant une table de mesures pour v et $\sigma(v)$, puis en interpolant des valeurs de $\sigma(v)$ d'abscisses équidistantes, à l'aide de formules d'interpolation plus ou moins raffinées. C'est ce qui sera fait à titre expérimental pour le lac de Genève (cf. pp. 103-108); on se contentera d'une interpolation linéaire : le but de ces calculs n'est pas tant de retrouver avec précision les résultats obtenus par la méthode de DEFANT, que de montrer comment les deux formules utilisées conduisent en fait à des fonctions propres $u(v)$ et à des valeurs propres λ tellement voisines qu'il devient difficile de dire laquelle des deux est la « meilleure ». Ceci paraît justifier l'emploi de la première formule d'approximation (II.4) (où l'on néglige le terme en u^{IV}), constamment utilisée dans la seconde partie de ce travail (consacrée au calcul des seiches transversales).

Si au lieu d'employer l'équation de CHRYSTAL sous sa forme habituelle, on l'écrit sous sa forme transformée

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} + \lambda\sigma(s)\zeta = 0, \quad (\text{I.11})$$

avec les conditions-frontière $\zeta'(0) = \zeta'(c) = 0$, et les notations :

ζ = dénivellation verticale (« hauteur » de la seiche),

$$s = \int_0^x \frac{dx}{S(x)} = \int_0^v \frac{dv}{\sigma(v)},$$

ou encore, si l'on veut, en différences finies, un accord rigoureux avec les résultats numériques obtenus pour l'équation écrite sous sa forme habituelle :

$$s = \int_0^v \frac{dv}{\tau(v)}, \quad \text{avec} \quad \tau(v) = S(x)\beta(x),$$

$$\beta(x) = \frac{\Delta x}{\Delta v} \quad (\text{largeur moyenne du compartiment considéré}), \quad \text{et} \quad c = \int_0^a \frac{dv}{\tau(v)},$$

la difficulté reste la même, puisque dans ce cas il faut prendre Δs constant, ce qui oblige à prendre Δx tel que son quotient par $S(x)$, section droite clôturant le compartiment, soit constant.

b) Un procédé plus raffiné consiste en l'emploi alternatif de deux formules pour la résolution de l'équation du second degré (I.10) (58).

La première de ces formules, dite « formule de prédiction », sert à trouver une première approximation de la fonction cherchée, au point considéré, et ce à l'aide des valeurs

(58) Cf. MILNE, W. E., *op. cit.*, pp. 88 sqq.

de la fonction en des points voisins; la seconde formule, dite « formule de correction », intervient ensuite pour améliorer cette approximation. Le procédé est répété jusqu'au moment où l'ordre de grandeur des corrections ainsi apportées atteint celui des erreurs d'arrondissement que comporte la marche des calculs.

On peut construire des couples de formules plus ou moins raffinées; toutes comportent des termes où interviennent des dérivées d'ordre supérieur, que l'on néglige habituellement, commettant ainsi ce qu'on appelle une « erreur de troncature ». L'étude de cette erreur est particulièrement intéressante si l'on veut se rendre compte de la valeur des formules utilisées.

Examinons ici, à titre d'exemple, le couple de formules préconisé par W. E. MILNE, *op. cit.*, *loc. cit.*

Formule de prédiction :

$$y_{n+1} - 2y_{n-1} + y_{n-3} = 4\Delta x^2 (y''_{n-1} + \frac{1}{3}\delta^2 y''_{n-1}) + \frac{16}{240}\Delta x^6 y^{VI}(s),$$

et formule de correction :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \Delta x^2 (y''_n + \frac{1}{12}\delta^2 y''_n) - \frac{1}{240}\Delta x^6 y^{VI}(t).$$

Les erreurs de troncature respectives de ces deux formules sont donc :

$$E_1 = \frac{16}{240}\Delta x^6 y^{VI}(s) \quad (\text{avec } x_{n-3} < s < x_{n+1}),$$

et

$$E_2 = -\frac{1}{240}\Delta x^6 y^{VI}(t) \quad (\text{avec } x_{n-1} < t < x_{n+1}).$$

La correction C_0 apportée par l'application de la seconde formule a donc pour expression $E_2 - E_1$, c'est-à-dire :

$$C_0 = -\frac{1}{240}\Delta x^6 y^{VI}(t) - \frac{16}{240}\Delta x^6 y^{VI}(s) = -\frac{17}{240}\Delta x^6 y^{VI}(r),$$

avec $x_{n-3} < r < x_{n+1}$ (y^{VI} étant supposée continue).

On a
$$E_2 - \frac{C_0}{17} = \frac{\Delta x^6}{240} [y^{VI}(r) - y^{VI}(t)]$$

et par suite, si l'on suppose l'existence d'une dérivée septième bornée $|y^{VII}| < M$:

$$E_2 - \frac{C_0}{17} = \frac{\Delta x^6}{240} y^{VII}(u) \cdot (r - t) \quad \text{avec } u \text{ compris entre } r \text{ et } t,$$

d'où
$$\left| E_2 - \frac{C_0}{17} \right| < \frac{\Delta x^6}{240} M |r - t| < \frac{\Delta x^7}{60} M,$$

puisque $|r - t| < 4\Delta x$.

Par conséquent, $E_2 = \frac{C_0}{17}$, avec une erreur de l'ordre de $\frac{\Delta x^7}{60}$.

Cette formule permet de suivre l'erreur de troncature à chaque pas; elle ne devient notablement inexacte que si la dérivée septième devient grande, c'est-à-dire si C_0 lui-même, qui est égal à $-17\Delta x^6 y^{VI}(t)/240$, change rapidement. On est donc averti par le fait même.

RECHERCHE DE LA LOI DE PROPAGATION DES ERREURS DE TRONCATURE PAS À PAS.

Désignons par e_n l'erreur qui entache y_n du fait de l'emploi des formules approchées de prédiction et de correction.

Comme la valeur retenue finalement pour y_n s'obtient par la formule de correction, c'est sur cette dernière que portera le raisonnement.

Appelons y la valeur calculée et z la valeur exacte de la fonction cherchée, solution d'une équation différentielle linéaire $y'' = f(x, y)$. On a donc

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \Delta x^2 (y_n'' + \frac{1}{12} \delta^2 y_n''),$$

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = \Delta x^2 (z_n'' + \frac{1}{12} \delta^2 z_n'') + E_n,$$

où l'on a posé

$$-\frac{1}{240} \Delta x^6 y^{VI}(t) = E_n \quad (x_{n-1} < t < x_{n+1}),$$

ou, à cause de l'équation différentielle :

$$y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1} = \Delta x^2 [f(x_n, y_n) + \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, y_n)],$$

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} = \Delta x^2 [f(x_n, z_n) + \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, z_n)] + E_n.$$

Appelons e_n l'erreur $y_n - z_n$. Il vient ainsi, par soustraction :

$$e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} = \Delta x^2 [f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n) + \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, y_n) - \frac{1}{12} \delta^2 f(x_n, z_n)] - E_n.$$

Le théorème de la moyenne donne

$$f(x_n, y_n) - f(x_n, z_n) = (y_n - z_n) \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_n, y}$$

(avec y compris entre y_n et z_n).

Posons $\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)_{x_n, y} = g_n$. On obtient ainsi :

$$e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} = \Delta x^2 [e_n g_n + \frac{1}{12} e_{n+1} g_{n+1} - \frac{2}{12} e_n g_n + \frac{1}{12} e_{n-1} g_{n-1}] - E_n$$

ou

$$\left(1 - \frac{1}{12} g_{n+1} \Delta x^2\right) e_{n+1} - \left(2 + \frac{5}{6} g_n \Delta x^2\right) e_n + \left(1 - \frac{1}{12} g_{n-1} \Delta x^2\right) e_{n-1} = -E_n.$$

En général g_n et E_n varient avec n ; si leur variation est lente, on peut se faire une idée du comportement de l'erreur e_n en traitant g_n et E_n comme des constantes, que l'on écrira g et E .

Posons encore

$$\frac{2 + 5g \Delta x^2 / 6}{1 - g \Delta x^2 / 12} = 2P, \quad \frac{E}{1 - g \Delta x^2 / 12} = L;$$

on peut alors écrire

$$e_{n+1} - 2P e_n + e_{n-1} = -L,$$

dont l'équation caractéristique s'écrit

$$r^2 - 2rP + 1 = 0.$$

α) Les racines r_1 et r_2 de cette équation seront réelles si $P^2 > 1$, c'est-à-dire si

$$\Delta x^2 > -\frac{6}{g},$$

et l'on a alors

$$e_n = A r_1^n + B r_2^n - \frac{E}{g \Delta x^2}.$$

Si $g > 0$ (cas $\alpha-1$), l'inégalité a toujours lieu.

Les racines étant inverses l'une de l'autre, il y a une racine supérieure en module à l'unité, de sorte que le module de l'erreur croît exponentiellement avec n .

Si $g < 0$ (cas $\alpha-2$), il faut

$$\Delta x > \sqrt{-\frac{6}{g}};$$

le comportement de l'erreur est identique à celui du cas ($\alpha-1$).

β) Si $P^2 = 1$, il y a une racine double et l'on a

$$e_n = A r_1^n + B n r_1^n - \frac{E}{g \Delta x^2}.$$

Comme $|r_1| = 1$, le module de l'erreur croît linéairement avec n .

γ) Enfin, si $P^2 < 1$, les racines de l'équation caractéristique sont complexes, et l'on a

$$e_n = A \sin(n \arccos P) + B \cos(n \arccos P) + \frac{E}{g \Delta x^2}$$

c'est-à-dire que l'erreur est oscillante, de signe variable.

Les constantes A et B se calculent à l'aide des valeurs e_0 et e_1 ⁽⁵⁹⁾.

⁽⁵⁹⁾ Pour une discussion plus détaillée, cf. SERVAIS, F., *Sur l'estimation des erreurs dans l'intégration numérique des équations différentielles linéaires du second ordre*, Ann. Soc. Scient. Brux., 70 (1956), pp. 5 sqq.

On peut facilement voir que les conclusions du cas γ s'appliquent à l'équation de G. CHRYSTAL, résolue directement comme équation différentielle du second ordre au moyen des formules de différences finies de la page 62. En effet, l'équation peut s'écrire

$$u'' = -\frac{\lambda u}{\sigma(v)}$$

(avec la variable indépendante v) ou encore

$$u'' = -\frac{\lambda u}{p(x)}$$

[avec la variable indépendante x ; on a posé $p(x) = S(x)/\beta(x)$].

Comme $\sigma(v)$ et $p(x)$, ainsi que λ , sont des quantités essentiellement positives, l'expression appelée g ci-dessus, c'est-à-dire ici $-\lambda/\sigma(v)$ ou $-\lambda/p(x)$, reste constamment négative, et par suite, l'erreur peut être toujours rendue oscillante.

Si l'on prend

$$\Delta x^2 y_n'' = y_{n+1} - 2y_n + y_{n-1},$$

le terme négligé dans le membre de droite étant $-\frac{1}{12} \Delta x^4 y_n^{IV}$, on peut écrire, dans le cas de l'équation de CHRYSTAL (variable indépendante x)

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = -\frac{\lambda \Delta x^2}{p_n} u_n.$$

On en tire à nouveau

$$e_{n+1} - 2m_n e_n + e_{n-1} = -E_n,$$

où l'on a posé

$$1 - \frac{\lambda \Delta x^2}{2p_n} = m_n.$$

Comme λ et p_n sont positifs, on a bien $m_n < 1$. Si l'on traite E_n et m_n comme pratiquement constants, on a

$$e_n = A \sin(n \text{ arc cos } m) + B \cos(n \text{ arc cos } m) - \frac{pE}{\lambda \Delta x^2},$$

c'est-à-dire que l'erreur oscille avec n et est de signe variable (le dernier terme est petit, de l'ordre de $\Delta x^2 z^{IV}$). Le cas de l'équation à variable indépendante v conduit au même résultat.

Montrons maintenant que ces conclusions s'étendent également aux résultats que l'on obtient par la méthode de DEFANT.

Rappelons le schéma de la méthode :

$$\zeta = -\frac{\Delta u}{\Delta v} \quad (\text{équation de conservation}),$$

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta x} = \frac{\lambda u}{S} \quad (\text{équation du mouvement}),$$

ou, afin d'avoir dans les deux équations la même variable indépendante :

$$\frac{\Delta \zeta}{\Delta v} = \frac{\lambda u}{S\beta} = \frac{\lambda u}{\tau(v)} \quad (\text{posé}).$$

On en tire, en écrivant les indices :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_{n+1}; \quad \Delta u_{n+1} = -\zeta_n \Delta v_{n+1}; \quad \zeta_n = \zeta_{n-1} + \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v_n = \zeta_{n-1} + \Delta \zeta_n.$$

Dès lors :

$$u_{n+1} = u_n - \zeta_n \Delta v_{n+1} = u_n - \left(\zeta_{n-1} + \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v_n \right) \Delta v_{n+1}.$$

ou, en supposant constants les intervalles Δv :

$$u_{n+1} = u_n + \Delta u_n - \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v^2 = u_n + (u_n - u_{n-1}) - \frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v^2.$$

A cause de l'équation de G. CHRYSTAL (qui résulte de l'élimination de ζ entre les équations du mouvement et de la conservation) on a enfin

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} = -\frac{\lambda u_n}{\tau_n} \Delta v^2.$$

L'emploi de la méthode de DEFANT revient donc, au point de vue de la propagation de l'erreur de troncature, à l'utilisation de la formule simplifiée $\Delta x^2 u_n'' = u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}$; son succès est dû au comportement exceptionnellement favorable de l'erreur, qui se propage de manière oscillante (et non de manière exponentielle croissante, comme cela aurait lieu si p_n et λ — ou, ce qui revient au même, σ_n et λ — étaient de signe opposé !).

Le même raisonnement peut se faire pour le cas où l'on prend x comme variable indépendante dans les équations du mouvement et de la conservation (il suffit de remarquer que β est supposé très peu variable en x , conformément à l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides, sous-jacente à toute la théorie de l'équation de CHRYSTAL).

Examinons encore, pour terminer, le cas de la formule approchée :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - \frac{1}{12} h^2 (u_{n+1}'' + 10u_n'' + u_{n-1}'') + \frac{1}{240} h^6 u_n^{VI} + \dots = 0$$

utilisée dans certains calculs de vérification effectués sur le lac de Genève (cf. pp. 106-108). On a, avec les notations habituelles (u = valeur calculée de la fonction propre; z = valeur exacte de celle-ci; s = valeur intermédiaire de la variable indépendante, comprise entre les valeurs des points extrêmes considérés, d'indices $n-1$ et $n+1$) :

$$u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1} - \frac{1}{12} \Delta v^2 (u_{n+1}'' + 10u_n'' + u_{n-1}'') = 0,$$

$$z_{n+1} - 2z_n + z_{n-1} - \frac{1}{12} \Delta v^2 (z_{n+1}'' + 10z_n'' + z_{n-1}'') + \frac{1}{240} \Delta v^6 z^{VI}(s) = 0,$$

d'où, par soustraction

$$e_{n+1} - 2e_n + e_{n-1} + \frac{1}{12} \Delta v^2 \left(\frac{\lambda}{\sigma_{n+1}} e_{n+1} + \frac{10\lambda}{\sigma_n} e_n + \frac{\lambda}{\sigma_{n-1}} e_{n-1} \right) - E_n = 0,$$

ou

$$e_{n+1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n+1}} \right) - 2e_n \left(1 - \frac{10\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_n} \right) + e_{n-1} \left(1 + \frac{\lambda \Delta v^2}{12 \sigma_{n-1}} \right) = E_n.$$

Moyennant l'hypothèse simplificatrice déjà utilisée précédemment (cf. p. 66) (c'est-à-dire σ_n et E_n « peu variables » avec n , et pris égaux à des constantes σ et E), on peut écrire :

$$e_{n+1} - 2Pe_n + e_{n-1} = -L.$$

avec

$$P = \frac{1 - 10\lambda\Delta v^2/12\sigma}{1 + \lambda\Delta v^2/12\sigma} < 1, \quad L = -\frac{\Delta v^6 z^{VI}/240}{1 + \lambda\Delta v^2/12\sigma}.$$

L'équation fonctionnelle de l'erreur est identique (aux constantes P et L près) à celle de la page 66, on pourra donc une fois de plus appliquer les conclusions précédentes, à savoir que l'erreur e_n est oscillante et de signe variable :

$$e_n = A \sin(n \text{ arc cos } P) + B \cos(n \text{ arc cos } P) - \frac{2}{3} \frac{\sigma E}{\lambda \Delta v^2}.$$

C'est donc toujours sur ce comportement particulier de l'erreur que repose le succès de la méthode considérée.

§ 4. LA MÉTHODE DES NŒUDS DE K. HIDAKA.

Cette méthode, proposée en 1932 par K. HIDAKA ⁽⁶⁰⁾, constitue également une méthode d'existence, moins pratique que celle de DEFANT, mais que nous décrirons cependant pour mémoire.

Elle consiste essentiellement à intégrer numériquement l'équation (I.10) de CHRYSTAL, à l'aide d'une valeur d'essai de λ , et à déterminer la position du nœud (ou des nœuds) de la seiche en partant successivement de chacune des deux extrémités du lac. La valeur d'essai de λ sera considérée comme satisfaisante si les nœuds occupent les mêmes positions dans les deux cas.

Pour intégrer (I.10), HIDAKA la décompose (formellement) en les deux équations simultanées :

$$\frac{du}{dv} = w, \quad \frac{dw}{dv} = -\frac{\lambda u}{\sigma(v)}.$$

Comme $\sigma(v)$ s'annule seulement aux points $v=0$ et $v=a$, l'auteur pose

$$\sigma(v) = H \cdot \frac{v}{a} \left(1 - \frac{v}{a}\right) \Phi\left(\frac{v}{a}\right),$$

ou, en changeant de variable ($v/a = z$) :

$$\sigma(z) = H \cdot z(1 - z) \Phi(z),$$

expression dans laquelle H est une constante et $\Phi(z)$ une fonction à déterminer.

⁽⁶⁰⁾ HIDAKA, K., *A Practical Method of Integrating Chrystal's Seiche Equations*, Geophys. Magaz., Tokyo, 5 (1932), pp. 273-281.

Cette fonction $\Phi(z)$ ne s'annule jamais dans l'intervalle $0 \leq z \leq 1$; aux extrémités, on lui attribue les valeurs $\Phi(0) = 1$, $\Phi(1) = \alpha > 0$. HIDAOKA pose alors $\Phi(z) = 1 + c_1 z + c_2 z^2 + \dots + c_n z^n + \dots$ ce qui donne $1 + c_1 + c_2 + \dots + c_n + \dots = \alpha$. Au voisinage de $z = 0$, $\Phi(z)$ est donc égal à $1 + 0(z)$, et par suite $\sigma(z) = H \cdot z + 0(z^2)$; au voisinage de $z = 1$, $\Phi(z) = \alpha + 0(1-z)$ et $\sigma(z) = \alpha H(1-z) + 0(1-z^2)$.

Les constantes $c_1, c_2 \dots c_n$ se déterminent par la méthode des moindres carrés.

Pour l'intégration des équations simultanées (système équivalent à l'équation de CHRYSTAL), HIDAOKA préconise la méthode numérique de RUNGE-KUTTA, dont on trouvera la description dans les ouvrages de calcul numérique ⁽⁶¹⁾.

Ainsi, la « méthode des nœuds » apparaît notablement plus compliquée que celle de A. DEFANT; l'on ne voit guère l'intérêt qu'il y a à rendre $\sigma(v)$ analytique, d'autant moins que ces calculs préliminaires seront certainement longs, et que l'accord entre la courbe expérimentale et la courbe analytique sera en général médiocre. Aussi cette méthode n'est-elle guère employée.

§ 5. LA MÉTHODE D'IMPÉDANCE DE G. NEUMANN ⁽⁶²⁾.

Le problème de l'oscillation longitudinale libre des masses d'eau conduisant à une équation différentielle en tous points comparable à celle des oscillations électriques d'un circuit inductif-capacitif (la résistance ohmique, qui joue le même rôle mathématique que le frottement interne de l'eau, étant négligée puisque ce dernier l'est aussi), il était assez naturel d'étendre au problème hydrodynamique le procédé de solution utilisé en électrotechnique: écrire que l'impédance du système est nulle. On obtient ainsi une équation (habituellement transcendante) dont l'inconnue est la pulsation $\omega = 2\pi/T$ du système.

En électricité on a, avec les notations classiques, pour un circuit inductif-capacitif oscillant, non amorti :

$$L \frac{dI}{dt} + \frac{1}{C} \int I dt = 0.$$

⁽⁶¹⁾ Cf. p. ex. RUNGE, C. und KÖNIG, H., *Vorlesungen über Numerisches Rechnen*, Berlin, 1924, pp. 311-316; COLLATZ, L., *Numer. Behndl. von Diffgl.*, Berlin, 1951, pp. 26 sqq.

⁽⁶²⁾ NEUMANN, G., *Die Impedanz Mechan. Schwingungssysteme und ihre Anwendung auf die Theorie der Seiches*, Ann. der Hydr., 72 (1944), pp. 65-79; *Eine Methode zur Berechnung der Eigenperioden zusammengesetzter Seebeckensysteme*, ibid., 72 (1944), pp. 193-205; *Ueber Seiches in Meeresbuchten und die Frage der Mündungskorrektur*, Annali di Geofisica, 3 (1950), pp. 25-31.

Si l'on prend des solutions oscillantes pour I , c'est-à-dire $I = I_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$, on a

$$\left(i\omega \mathcal{L} + \frac{1}{i\omega C}\right) I_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = 0, \quad \text{d'où } \omega = \frac{1}{\sqrt{\mathcal{L}C}}, \quad \text{ou } T = 2\pi \sqrt{\mathcal{L}C},$$

c'est-à-dire la formule de THOMSON bien connue.

Mathématiquement, il a suffi, pour obtenir ce dernier résultat, d'écrire que l'impédance du système est nulle :

$$Z = R + i\left(\omega \mathcal{L} - \frac{1}{\omega C}\right) = 0,$$

(R étant nul dans le cas qui nous occupe).

En mécanique, on a de même, pour l'oscillateur harmonique :

$$m \frac{d^2 \xi}{dt^2} + r \frac{d\xi}{dt} + s\xi = 0$$

(ξ étant l'élongation, r la constante de frottement, m la masse, s la constante de raideur). Si $r = 0$, on a en prenant des solutions oscillantes pour ξ ($\xi = \xi_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$):

$$\left(i\omega m + \frac{s}{i\omega}\right) \xi_0 e^{i(\omega t + \varphi)} = 0 \quad \text{d'où } \omega = \sqrt{s/m} \quad \text{ou } T = 2\pi \sqrt{m/s};$$

on voit que la masse joue le même rôle que la self-induction \mathcal{L} et que la constante de raideur correspond à l'inverse de la capacité C . L'impédance mécanique est donc le rapport d'une force à une vitesse.

En hydrodynamique enfin, l'impédance sera le rapport de la pression hydrostatique maxima due à la dénivellation et s'exerçant sur la tranche liquide, à la vitesse de déplacement du volume balayé; ceci suppose nécessairement que les systèmes oscillants soient de profondeur et de largeur uniforme. Etant donné que le frottement interne est négligé, l'impédance hydrodynamique est, tout comme les impédances électrique et mécanique dans les mêmes conditions, une grandeur purement imaginaire.

On peut encore poursuivre la comparaison entre les systèmes électriques et les systèmes hydrodynamiques oscillants, en remarquant qu'à une ligne en court-circuit à son extrémité correspond un canal ouvert sur une masse d'eau infinie (nœud de dénivellation à l'embouchure); si la ligne est ouverte, le cas est analogue à celui d'un canal fermé à son extrémité (ventre de dénivellation à l'extrémité).

Voici, à titre d'illustration de la méthode, quelques applications simples.

a) Soit un canal, fermé aux deux extrémités, de longueur l , de profondeur h_0 et de largeur b_0 (uniformes). L'origine des x étant prise à l'une des extrémités, on a pour le fondamental :

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\omega t} \cos \frac{\omega x}{2c},$$

$c = \Lambda/T$ désignant la vitesse de propagation et Λ , longueur d'onde de la seiche, étant égal à $2l$.

L'équation du mouvement donne

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \frac{\omega g}{2c} \zeta_0 e^{i\omega t} \sin \frac{\omega x}{2c}$$

d'où

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \frac{g}{2ic} \zeta_0 e^{i\omega t} \sin \frac{\omega x}{2c} + c^te.$$

Moyennant un choix convenable de l'origine des temps, la constante d'intégration pourra être prise nulle : il faut que, pour $t = 0$, la vitesse horizontale atteigne un maximum, c'est-à-dire que pour $t = 0$ la masse d'eau passe en oscillant à travers sa position au repos.

On a alors

$$Z \equiv \frac{\rho g Z_M}{S \xi_M} = \frac{\rho g \zeta_0 \cos(\omega x/2c)}{(g/2ic) S \zeta_0 \sin(\omega x/2c)} = \frac{2i\rho c}{S} \cotg \frac{\omega x}{2c}. \quad (\text{II.6})$$

Cette quantité s'annule pour $x = l$ à condition que

$$\frac{\omega l}{2c} = \frac{\pi}{2}, \quad \text{c'est-à-dire que } T = \frac{2l}{\sqrt{gh_0}}.$$

La formule de MERIAN (pour le fondamental) se retrouve ainsi comme le pendant hydrodynamique de la formule de THOMSON.

Si le canal est fermé en $x = 0$ et ouvert en $x = l$, on a $\Lambda = 4l$ et l'équation de la période s'écrit

$$\cotg \frac{\omega l}{c} = 0, \quad \text{d'où } T = \frac{4l}{\sqrt{gh_0}}.$$

Si le canal est ouvert aux deux bouts, on retrouve à nouveau $\Lambda = 2l$, d'où l'équation

$$\tg \frac{\omega l}{c} = 0 \quad \text{ou} \quad T = \frac{2l}{\sqrt{gh_0}}.$$

Ces résultats s'étendent sans difficulté aux modes supérieurs.

Mais l'intérêt véritable de la méthode réside dans la simplification qu'elle apporte à l'étude des bassins couplés; suivant que les masses d'eau sont « en série » ou « en parallèle », on additionne les impédances ou leurs inverses et on annule l'impédance totale, ce qui donne l'équation en ω , c'est-à-dire la période du système. Si les bassins sont de forme irrégulière, un calcul préalable est nécessaire, car la méthode implique essentiellement que la largeur et la profondeur de chaque bassin soient constantes, ces grandeurs pouvant cependant différer d'un bassin à l'autre. On devra donc calculer la période de chaque bassin comme s'il était fermé et donc entièrement autonome, et ensuite trouver les dimensions d'un bassin de largeur et de profondeur constante, de longueur égale à celle du bassin irrégulier en question et de période égale à celle de ce dernier.

Le système est ainsi remplacé par un système « équivalent » quant aux périodes (le profil des seiches pouvant être plus ou moins altéré par cette substitution).

b) Soit le cas d'un canal fermé en forme de Y (cf. fig. 8). L'eau venant de I pouvant s'écouler aussi bien en II qu'en III, on dira que (I, II) et (I, III) sont en série et que (II, III) sont en parallèle.

Soient Z_1, Z_2, Z_3 les impédances respectives des trois tronçons, et Z_{23} celle du système (II, III); on aura :

$$\frac{1}{Z_{23}} = \frac{1}{Z_2} + \frac{1}{Z_3} \quad \text{ou} \quad Z_{23} = \frac{Z_2 Z_3}{Z_2 + Z_3};$$

l'impédance totale vaut

$$Z \equiv Z_1 + Z_{23} = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_1}{Z_2 + Z_3},$$

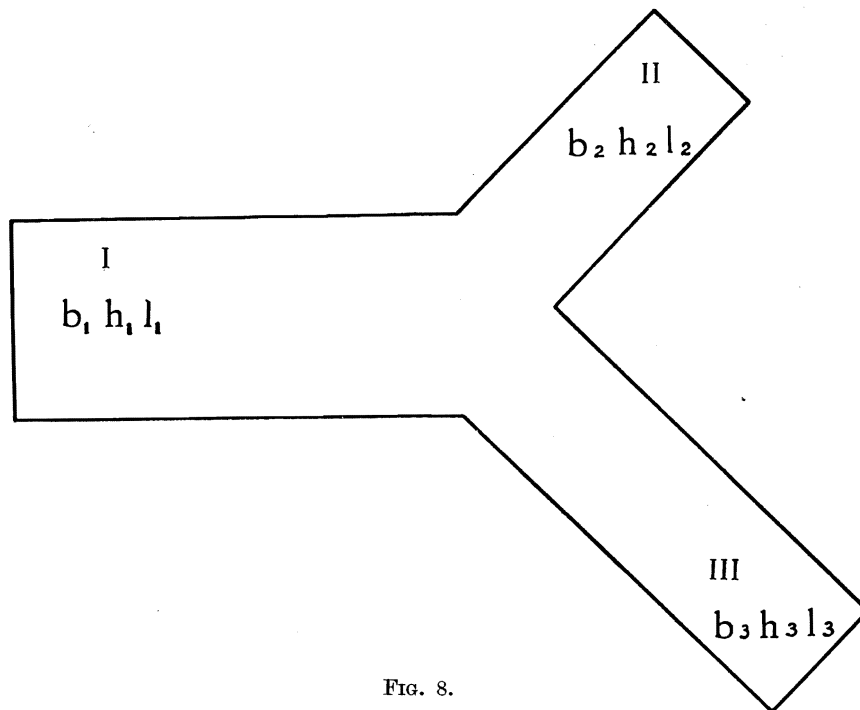


FIG. 8.

[D'après G. NEUMANN, Ann. Hydrographie, 72 (1944), pp. 65 sqq.]

et l'équation $Z = 0$ s'écrira, à cause de (II.6) :

$$\sum_{i=1}^3 \frac{b_i h_i}{c_i} \operatorname{tg} \frac{\omega l_i}{c_i} = 0,$$

ou, en multipliant par g :

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i \operatorname{tg} \frac{\omega l_i}{c_i} = 0.$$

On vérifie également sans difficulté que si le canal I est ouvert sur un océan infini, II et III restant fermés, l'équation aux fréquences devient :

$$-b_1 c_1 \operatorname{cotg} \frac{\omega l_1}{c_1} + b_2 c_2 \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c_2} + b_3 c_3 \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c_3} = 0.$$

Si I et II sont ouverts sur un océan infini et si III reste fermé, on trouve pour l'équation aux fréquences :

$$-b_1 c_1 \cotg \frac{\omega l_1}{c_1} - b_2 c_2 \cotg \frac{\omega l_2}{c_2} + b_3 c_3 \tg \frac{\omega l_3}{c_3} = 0.$$

Enfin, si les trois canaux sont ouverts, l'équation devient :

$$\sum_{i=1}^3 b_i c_i \cotg \frac{\omega l_i}{c_i} = 0.$$

c) La méthode de NEUMANN fournit également une réponse mathématique élégante à la question suivante : est-il légitime, lorsqu'on étudie les seiches longitudinales d'un lac, de « couper » les petites baies latérales, de dimensions très petites devant celles de l'ensemble du lac ? Physiquement, la chose va de soi : il est clair que la présence d'une baie qui ne contient qu'une très faible masse d'eau ne saurait influencer que d'une manière

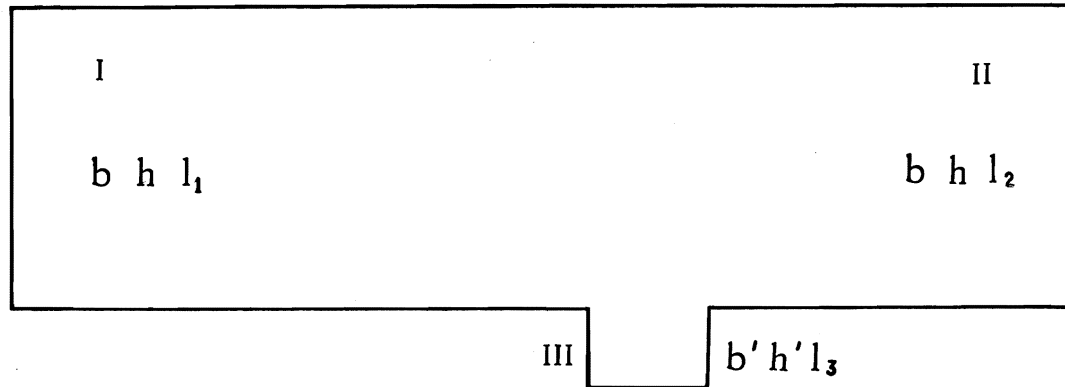


FIG. 9.

[D'après G. NEUMANN, même article.]

négligeable les périodes et les dénivellations des seiches affectant la totalité de la masse d'eau du lac.

Mathématiquement, la chose vaut cependant la peine d'être mise au point; il ne suffit pas, par exemple, de montrer « expérimentalement », en faisant des calculs numériques à l'aide d'une méthode approchée, comme celle de DEFANT, que les périodes du lac possédant une ou plusieurs petites baies latérales ne diffèrent pratiquement pas de celles que l'on obtient en amputant le lac de ces baies : en effet la présence de ces baies interdit, en toute rigueur, l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides; il y aurait contradiction à utiliser ici une méthode reposant sur cette hypothèse.

Soit donc le cas d'un lac possédant une petite baie latérale (fig. 9); soient Z_1, Z_2, Z_3 les impédances respectives de trois « bassins »; I et II sont supposés avoir même largeur b et même profondeur h .

Les bassins I et III peuvent être considérés comme étant en parallèle; quant au système (I, III), il est en série avec II. On a donc

$$Z_{13} = \frac{Z_1 Z_3}{Z_1 + Z_3},$$

et l'impédance totale est, comme précédemment :

$$Z = \frac{Z_1 Z_2 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4}{Z_1 + Z_3} = 0.$$

L'équation $Z = 0$ peut donc s'écrire :

$$\frac{bh}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l_1}{c} + \frac{bh}{c} \operatorname{tg} \frac{\omega l_2}{c} + \frac{b'h'}{c'} \operatorname{tg} \frac{\omega l_3}{c'} = 0. \quad (\text{A})$$

A cause des dimensions très petites de III, les quotients $\frac{b'h'}{c'}$ et $\frac{\omega l_3}{c'}$ sont négligeables et, par suite, le troisième terme peut être laissé de côté.

Si l'on avait purement et simplement coupé le bassin III, on aurait obtenu, pour I et II en série, l'équation

$$\frac{c}{bh} \operatorname{cotg} \frac{\omega l_1}{c} + \frac{c}{bh} \operatorname{cotg} \frac{\omega l_2}{c} = 0;$$

or, cette dernière, après division par

$$\operatorname{cotg} \frac{\omega l_1}{c} \operatorname{cotg} \frac{\omega l_2}{c}$$

est identique à l'équation (A) dans laquelle on aurait négligé le troisième terme. La question est ainsi résolue.

d) G. NEUMANN examine encore un grand nombre de bassins couplés de différentes manières, ouverts sur un océan infini ou fermés; il semble inutile pour le moment de passer en revue tous ces résultats, puisque le principe de la méthode reste toujours le même : annuler l'impédance totale du système des bassins ⁽⁶³⁾. Relevons seulement que lorsque des détroits relient les bassins entre eux ou à l'océan, une légère complication surgit : étant donné les faibles dimensions du détroit devant celles des bassins, celui-ci ne peut plus être purement et simplement assimilé à un canal où règne une oscillation stationnaire propre, il y aura lieu de procéder à une « correction d'embouchure ». La théorie de cette dernière a fait l'objet de divers travaux dont les résultats seront résumés dans un prochain paragraphe (cf. § 9).

e) Plus généralement, lorsque le lac dont on étudie les oscillations libres est très étendu ou se compose de plusieurs bassins (ce sera le cas notamment pour le Tanganika), un problème spécial se pose, que l'on pourra résoudre grâce à l'introduction de la notion d'impédance en hydrodynamique : qu'arrive-t-il lorsqu'une perturbation de la pression atmosphérique (cyclone, orage, etc.) déclenche une onde de pression dans l'un seulement des bassins du lac, sans affecter directement les autres ?

Si le bassin affecté était fermé, cette onde y amorcerait un système de seiches composé généralement de la superposition de plusieurs modes normaux.

⁽⁶³⁾ Cf. NEUMANN, G., articles cités note 62, principalement le premier, pp. 70-79. Les résultats sont confirmés par des études expérimentales, cf. Ann. Hydrogr., 71 (1943), p. 418; 72 (1944), pp. 195 sqq.

Mais, comme le bassin en question communique avec un autre bassin au moins, il est possible que le mouvement s'étende à ce dernier, ou bien, au contraire, qu'il reste pratiquement localisé au bassin où s'est produite la perturbation initiale. Tout dépendra de la manière dont se comportent, au point de vue de l'impédance hydrodynamique, les détroits, canaux ou étranglements reliant les différents bassins entre eux; leur rôle peut être assimilé à celui de filtres électriques, les bassins eux-mêmes faisant alors fonction de circuits oscillants. Il suffira donc de déterminer les impédances des différents « circuits » et « filtres » pour pouvoir déterminer les coefficients de réflexion et de transmission des détroits et étranglements à l'égard des ondes de pression se propageant à partir de l'un des bassins, et résoudre ainsi le problème. Si l'onde est transmise de manière pratiquement totale à travers les détroits, le mouvement se traduira par des seiches globales, affectant tout le lac; si au contraire la réflexion est à peu près complète, l'on aura des seiches nettement localisées; dans les cas intermédiaires enfin, les deux types de seiches coexisteront, avec échange continu d'énergie cinétique d'un type à l'autre.

Pratiquement, on procédera comme suit : après avoir calculé, par la méthode de DEFANT, la période propre (à un ou plusieurs nœuds) du lac considéré comme formant un tout (pour autant que la forme de celui-ci permet d'introduire l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides), on dressera une table de la fonction $\Xi(v) = \zeta/u$ dans les régions où l'on a repéré l'existence d'un étranglement ou d'un détroit ⁽⁶⁴⁾ et l'on comparera celle-ci avec la fonction

$$- \frac{2\pi c'}{gST'} \cotg \frac{\pi x}{2l'}$$

en deçà du détroit, et avec la fonction

$$\frac{2\pi c''}{gST''} \cotg \frac{\pi x}{2l''}$$

au-delà du détroit, l' et l'' désignant les longueurs respectives des deux bassins situés l'un en deçà et l'autre au-delà du détroit, longueurs mesurées le long du Talweg et en direction du détroit en question (d'où les signes opposés des deux fonctions \cotg); c' , T' , etc., ont des significations correspondantes.

En effet, on a, pour l'impédance d'un bassin de longueur l , ouvert en $x=l$:

$$Z \equiv \frac{\rho g \zeta_M}{S \dot{\xi}_M} = \frac{i \rho c}{S} \cotg \frac{\omega x}{c}.$$

⁽⁶⁴⁾ En général, l'inspection d'une simple carte géographique du lac sera insuffisante pour repérer ces régions, et c'est à la courbe normale du lac (cf. p. 24) qu'il faudra avoir recours; seul un minimum bien accusé compris entre deux maxima bien marqués également pourra être interprété comme correspondant à un étranglement ou détroit. On verra plus loin, à propos du Tanganika, que la division du lac en bassins, qui résulte de cette manière de voir, peut différer considérablement de celle que l'on serait tenté d'adopter après examen d'une carte géographique.

Comme $u \sim e^{i\omega t}$ et $c = \Lambda/T = 4l/T$, on en tire : $\zeta/u = -\frac{2\pi c}{SgT} \cotg \frac{\pi x}{2l}$.

(Les formules données ici se rapportent aux seiches uninodales, mais il est facile de les étendre au cas des plurinodales.)

Si le graphique de la fonction $\Xi(v)$ présente, dans la région étudiée et de part et d'autre ce que l'on supposait être un étranglement, une allure bien semblable à celle de la fonction \cotg , sans discontinuités brusques, on sera assuré que les régions que l'on avait supposées séparées par un détroit se comportent en réalité comme un seul bassin, du moins à l'égard du type de seiche correspondant à la période utilisée dans le calcul : les impédances Z' et Z'' des deux régions sont les mêmes.

Si au contraire une discontinuité de la fonction $\Xi = \zeta/u$ apparaît dans la zone explorée, on devra en conclure que les impédances Z' et Z'' sont distinctes de part et d'autre de cette discontinuité, et qu'il y a donc une véritable séparation entre les bassins. Soit alors α le rapport des impédances : $Z'/Z'' = \alpha$; cette quantité se détermine aisément à l'aide de la table ζ/u . Il suffit à présent d'utiliser les résultats bien connus en électricité (théorie des phénomènes de régime sur les lignes) :

$$\text{coefficient de réflexion : } \rho_R = \frac{Z'' - Z'}{Z'' + Z'} = \frac{1 - \alpha}{1 + \alpha},$$

$$\text{coefficient de transmission : } \rho_T = \frac{2Z'}{Z'' + Z'} = \frac{2\alpha}{1 + \alpha},$$

pour trouver immédiatement le pourcentage de dénivellation réfléchi ou transmise à travers l'étranglement ou le détroit.

Le procédé s'adapte sans difficulté aux différents cas particuliers que l'on peut rencontrer, et permet de rendre compte d'un phénomène important, dont aucune des autres méthodes décrites ici ne permettait l'investigation.

§ 6. LA MÉTHODE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DE FREDHOLM.

On peut transformer l'équation

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0, \quad (\text{I.10})$$

soumise aux conditions-frontière $u(0) = u(a) = 0$, en une équation intégrale de FREDHOLM, de la manière suivante ⁽⁶⁵⁾ : on a

$$u(v) = - \int_0^v (v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1 v + c_2$$

⁽⁶⁵⁾ Cf. HAMEL, G., *Integralgleichungen*, Berlin, 1949, pp. 17 sqq.

[en effet, en dérivant deux fois, on obtient successivement :

$$u' = \left[-(v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} \right]_{z=0}^{z=v} - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1 = - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1; \quad u'' = - \frac{\lambda u(v)}{\sigma(v)},$$

c'est-à-dire (I.10)], où c_1 et c_2 sont des constantes à déterminer de manière que $u(v)$ satisfasse aux conditions-frontière. On a évidemment $c_2 = 0$ à cause de $u(0) = 0$. La seconde condition, $u(a) = 0$, donne :

$$0 = - \int_0^a (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + c_1 a, \quad \text{d'où} \quad c_1 = \frac{1}{a} \int_0^a (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz.$$

Par suite,

$$\begin{aligned} u(v) &= \frac{v}{a} \int_0^a (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz - \int_0^v (v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz = - \int_0^v (v-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz \\ &+ \int_0^v \frac{v}{a} (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + \int_v^a \frac{v}{a} (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz = \int_0^v \frac{-(v-z)a + v(a-z)}{a} \cdot \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz \\ &+ \int_v^a \frac{v}{a} (a-z) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz = \int_0^v \frac{z(a-v)}{a} \cdot \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + \int_v^a \frac{v(a-z)}{a} \cdot \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz. \end{aligned}$$

Posons

$$K(v, z) = \begin{cases} \frac{z(v-a)}{a} & \text{pour } z \leq v, \\ \frac{v(z-a)}{a} & \text{pour } z \geq v. \end{cases}$$

Il vient alors

$$u(v) + \lambda \int_0^a K(v, z) \frac{u(z)}{\sigma(z)} dz = 0. \quad (\text{II.7})$$

La fonction $K(v, z)$ est le noyau (symétrique) de l'équation intégrale de FREDHOLM (II.7).

A l'aide de cette équation, on peut obtenir λ par le procédé d'itération de E. PICARD ⁽⁶⁶⁾. Pour cela, on prend une fonction d'essai $u(v) = u_{(1)}(v)$, que l'on porte dans (II.7).

La seule condition à laquelle $u_{(1)}(v)$ doit satisfaire est que l'on ait :

$$\int_0^a K(v, z) \frac{u_{(1)}(z)}{\sigma(z)} dz \neq 0;$$

on donne ensuite à v une valeur fixe v_0 ($0 \leq v_0 \leq a$) telle que $u(v_0) \neq 0$; la signification physique de u rend ce choix aisé : il suffit de prendre pour v_0 l'abscisse d'un point dont on soit sûr qu'il ne coïncide pas avec un ventre de l'oscillation étudiée.

⁽⁶⁶⁾ Cf. PICARD, E., *Traité d'Analyse*, III, chap. 7; HAMEL, G., *op. cit.*, pp. 51 sqq.

Une seconde fonction d'essai $u_{(2)}(v)$ se détermine alors à l'aide de l'équation (II.7) :

$$u_{(2)}(v) + \lambda' \int_0^a K(v, z) \frac{u_{(1)}(z)}{\sigma(z)} dz = 0.$$

Il suffit d'assigner une valeur donnée à $u_{(2)}(v_0)$ pour en déduire une première approximation de λ , soit λ' :

$$u_{(2)}(v_0) + \lambda' \int_0^a K(v_0, z) \frac{u_{(1)}(z)}{\sigma(z)} dz = 0.$$

Procédant ainsi par itération, on obtient successivement une troisième fonction $u_{(3)}(v)$ et une seconde approximation λ'' pour le paramètre λ , puis une quatrième fonction $u_{(4)}(v)$ et une troisième approximation λ''' , etc.

On démontre que si les fonctions $u_{(1)}, u_{(2)}, \dots$ sont normées, les valeurs $\lambda', \lambda'', \dots$ convergent en décroissant vers la valeur propre cherchée.

Le même raisonnement peut s'appliquer à l'équation (I.11) : on trouve l'équation intégrale :

$$\zeta(s) + \lambda \int_0^c K(s, z) \sigma(z) \zeta(z) dz = 0, \quad (\text{II.7}')$$

que l'on résout par le même procédé que l'équation (II.7).

Le choix du point s_0 ($0 \leq s_0 \leq c$) sera maintenant dicté par le souci d'éviter de prendre un point où ζ s'annule, c'est-à-dire un nœud de l'oscillation étudiée, ce qui en général pourra se faire sans difficulté.

Comme dans le cas de lacs réels $\sigma(v)$ n'est connue que par points, les calculs d'itération seront en général démesurément longs, et le procédé risque d'avoir peu d'intérêt pratique. Nous verrons cependant, à propos du Tanganika, que l'on obtient un λ (fondamental) presque parfait dès le premier essai : la méthode est ainsi de loin la plus rapide pour le calcul de ce fondamental.

§ 7. LA MÉTHODE DE L'ÉQUATION INTÉGRALE DE VOLTERRA.

L. MATTEUZZI transforme comme suit l'équation de CHRYSTAL (I.10).

Une première intégration de 0 à v donne ⁽⁶⁷⁾ :

$$\frac{du}{dv} = u'(0) - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz,$$

et une seconde intégration entre les mêmes limites [en remarquant que $u(0) = 0$] :

$$u(v) = - \int_0^v dz \int_0^z \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + u'(0) v,$$

ou

$$u(v) = - \int_0^v \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz \int_z^v dz + u'(0) v = \int_0^v (z - v) \frac{\lambda u(z)}{\sigma(z)} dz + u'(0) v.$$

⁽⁶⁷⁾ MATTEUZZI, L., *Sulla Determinazione delle Seiches forzate e delle Seiches libere mediante una equazione integrale di Volterra*, Rendic. Atti R. Acc. Naz. Lincei, 33 (1924), 5^e série, Cl. sc. fis. mat. e nat., pp. 474-480.

On en tire

$$u'(0)v = u(v) - \lambda \int_0^v (z-v) \frac{u(z)}{\sigma(z)} dz, \quad (\text{II.8})$$

c'est-à-dire une équation de VOLTERRA de seconde espèce, dont le noyau est :

$$\frac{\lambda(v-z)}{\sigma(z)}.$$

Elle admet pour solutions ⁽⁶⁸⁾ :

$$u(v) = u'(0)v + \int_0^v K(v,z) u'(0)z dz,$$

le noyau résolvant $K(v,z)$ étant égal à

$$\sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda(v-z)}{\sigma(z)} \right]^{(i)},$$

où l'on a

$$\left[\frac{\lambda(v-z)}{\sigma(z)} \right]^{(1)} = - \frac{\lambda(v-z)}{\sigma(z)}$$

$$\left[\frac{\lambda(v-z)}{\sigma(z)} \right]^{(2)} = \frac{(-\lambda)^2}{\sigma(z)} \int_z^v \frac{(v-z_1)(z_1-z)}{\sigma(z_1)} dz_1$$

$$\left[\frac{\lambda(v-z)}{\sigma(z)} \right]^{(3)} = \frac{(-\lambda)^3}{\sigma(z)} \int_z^v \int_z^{z_1} \frac{(v-z_1)(z_1-z_2)(z_2-z)}{\sigma(z_1)\sigma(z_2)} dz_1 dz_2$$

.....

$$\left[\frac{\lambda(v-z)}{\sigma(z)} \right]^{(i)} = \frac{(-\lambda)^i}{\sigma(z)} \int_z^v \int_z^{z_1} \dots \int_z^{z_{i-2}} \frac{(v-z_1)(z_1-z_2) \dots (z_{i-1}-z)}{\sigma(z_1) \dots \sigma(z_{i-1})} dz_1 \dots dz_{i-1}.$$

La solution $u(v)$ peut se mettre sous la forme :

$$u(v) = u'(0)v + \sum_{i=1}^{\infty} (-\lambda)^i U_i(0,v).$$

On démontre qu'entre les $U_i(0,v)$ il existe la relation de récurrence

$$U_i(0,v) = \int_0^v \frac{v-z}{\sigma(z)} U_{i-1}(0,z) dz,$$

et qu'ainsi on a $u'(0)v = U_0(0,v)$.

⁽⁶⁸⁾ VOLTERRA, V., *Leçons sur les équations intégrales et intégral-différentielles*, Paris, 1913, chap. II, § 2.

Faisons ensuite $v = a$ dans la solution ci-dessus, et remarquons que $u(a) = 0$: il vient

$$\sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i U_i(0, a) = 0. \quad (\text{II.9})$$

Cette dernière égalité n'est autre que l'équation aux valeurs propres du problème.

Ainsi présentée, la méthode reste purement théorique et n'a jamais été utilisée pour la résolution numérique d'un problème de seiches. Cependant, quoi qu'en pense L. MATTEUZZI lui-même, le point de vue qui sert de base à cette méthode n'est pas essentiellement différent de celui de J. PROUDMAN, qui arrive, par une voie un peu détournée, à la même équation aux valeurs propres et à la même solution $u(v)$ de l'équation de CHRYSTAL. Ce procédé de J. PROUDMAN, antérieur d'une dizaine d'années à l'exposé de MATTEUZZI, se prête à des applications numériques ⁽⁶⁹⁾, mais les calculs sont excessivement longs et la précision n'est pas supérieure à celle de la méthode de DEFANT. Aussi ne sera-t-il pas utilisé dans ce travail et se contentera-t-on d'en donner une description sommaire.

§ 8. LA MÉTHODE DE J. PROUDMAN ⁽⁷⁰⁾.

Au lieu de l'équation différentielle de CHRYSTAL (I.10), l'auteur considère une équation aux différences finies :

$$u(r-1) + \left[\frac{a^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(r)} - 2 \right] u(r) + u(r+1) = 0,$$

pour $r = 1, 2, \dots, m-1$, avec $u(0) = u(m) = 0$. Cette équation est suggérée par l'équation de CHRYSTAL qui en est la forme-limite quand les différences deviennent infiniment petites.

Ces relations forment un système d'équations linéaires en $u(1), \dots, u(m-1)$ à solutions non toutes nulles, pourvu que le déterminant

$$D(\mu, \nu, \lambda) \equiv \begin{vmatrix} 2 - \frac{a^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(\mu+1)} & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 - \frac{a^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(\mu+2)} & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 - \frac{a^2}{m^2} \cdot \frac{\lambda}{\sigma(\nu-1)} \end{vmatrix}$$

s'annule lorsque $\mu = 0$ et $\nu = m$, c'est-à-dire que l'on ait $D(0, m, \lambda) = 0$.

⁽⁶⁹⁾ La seule que l'on en connaisse dans la littérature scientifique concerne les seiches du lac de Genève : DOODSON, A. T., CAREY, R. M. and BALDWIN, R., *Theoretical Determination of the Longit. Seiches of Lake Geneva*, Trans. Roy. Soc. Edinburgh, 52 (1920), pp. 629-642.

⁽⁷⁰⁾ Cf. PROUDMAN, J., *Free and Forced Longit. Tidal Motion in a Lake*, Proc. London Math. Soc., 14 (1914), pp. 240-250, ainsi que DOODSON, A. T., etc., *op. cit.*

Les racines du système correspondant à $\lambda = \lambda_j$ satisfont aux relations de CRAMER :

$$\frac{u(1)}{D(0, 1, \lambda_j)} = \frac{u(2)}{D(0, 2, \lambda_j)} = \dots = \frac{u(m-1)}{D(0, m-1, \lambda_j)},$$

ou

$$\frac{u(1)}{D(1, m, \lambda_j)} = \frac{u(2)}{D(2, m, \lambda_j)} = \dots = \frac{u(m-1)}{D(m-1, m, \lambda_j)}.$$

On démontre par ailleurs que $D(\mu, \nu, 0) = \nu - \mu$ et que

$$D(\mu, \nu, \lambda) = \nu - \mu + \sum_{n=1}^{\nu-\mu-1} (-\lambda)^n S_n(\mu, \nu)$$

avec

$$\begin{aligned} S_n(\mu, \nu) &= \frac{a^{2n}}{m^{2n}} \sum_{s_n=\mu+n}^{\nu-1} \sum_{s_{n-1}=\mu+n-1}^{s_n-1} \dots \sum_{s_2=\mu+2}^{s_2-1} \sum_{s_1=\mu+1}^{s_2-1} \frac{(\nu - s_n)(s_n - s_{n-1}) \dots (s_1 - \mu)}{\sigma(s_1) \sigma(s_2) \dots \sigma(s_n)} \\ &= \frac{a^{2n}}{m^{2n}} \sum_{s_n=\mu+1}^{\nu-n} \sum_{s_{n-1}=\mu+1}^{s_n-1} \dots \sum_{s_2=\mu+1}^{\nu-2} \sum_{s_1=\mu+1}^{s_2-1} \frac{(\nu - s_1)(s_1 - s_2) \dots (s_n - \mu)}{\sigma(s_1) \sigma(s_2) \dots \sigma(s_n)}. \end{aligned}$$

Ces expressions mènent à considérer les intégrales :

$$\int_{s_n=\xi}^{\eta} \int_{s_{n-1}=\xi}^{s_n} \dots \int_{s_2=\xi}^{s_2} \int_{s_1=\xi}^{s_2} \frac{(\eta - s_n)(s_n - s_{n-1}) \dots (s_2 - s_1)(s_1 - \xi)}{\sigma(s_1) \dots \sigma(s_n)} ds_1 \dots ds_n$$

et

$$\int_{s_n=\xi}^{\eta} \int_{s_{n-1}=s_n}^{\eta} \dots \int_{s_2=s_2}^{\eta} \int_{s_1=s_2}^{\eta} \frac{(\eta - s_1)(s_1 - s_2) \dots (s_{n-1} - s_n)(s_n - \xi)}{\sigma(s_1) \dots \sigma(s_n)} ds_1 \dots ds_n$$

n étant un entier positif et $0 \leq \xi \leq \eta \leq a$.

Les intégrandes sont toujours positifs et l'on peut intervertir l'ordre des intégrations pourvu que les intégrales multiples existent. On démontre que les deux intégrales ci-dessus sont égales. Soit $I_n(\xi, \eta)$ leur valeur commune. On a alors la relation de récurrence :

$$I_n(\xi, \eta) = \int_{\xi}^{\eta} \frac{\eta - s}{\sigma(s)} I_{n-1}(\xi, s) ds.$$

Considérons ensuite la fonction $R(\xi, \eta, \lambda)$, définie par

$$R(\xi, \eta, \lambda) = \sum_{i=0}^{\infty} (-\lambda)^i I_i(\xi, \eta).$$

On démontre que si $\sigma(v) > kv(a-v)$ ($k =$ constante positive), $I_n(0, a)$ existe, et que les solutions u_j de l'équation de CHRYSTAL sont données par

$$u_j = R(0, v, \lambda_j) = R(v, a, \lambda_j), \quad (\text{II.10})$$

l'équation aux valeurs propres étant

$$R(0, a, \lambda_j) = 0. \quad (\text{II.11})$$

Pour l'utilisation pratique du procédé, on procède par différences finies, à l'aide d'un grand nombre de divisions. Les calculs sont très longs, ce qui rend la méthode peu commode. Aussi renvoyons-nous pour complément d'information aux articles originaux (voir note 70).

§ 9. LA MÉTHODE DE CORRECTION DE K. HONDA ⁽⁷¹⁾.

Cette méthode, qui s'applique uniquement aux baies et aux golfes, consiste à les assimiler en première approximation à des bassins rectangulaires de profondeur h_0 et de largeur b_0 (constantes), ouverts à une extrémité, et à apporter aux périodes d'oscillation ainsi obtenues deux corrections : la première, pour l'embouchure du golfe, où les conditions pour ξ et ζ ne sont pas exactement les mêmes qu'au milieu d'un bassin fermé de même section droite et de longueur double; la seconde vise à tenir compte des variations de largeur et de profondeur que présente le golfe depuis son embouchure jusqu'à son extrémité fermée.

Pour que ce procédé de corrections ait un sens, il faut évidemment que le golfe étudié présente une forme à peu près rectangulaire et une profondeur sensiblement uniforme, sans quoi les périodes obtenues en première approximation (à l'aide de la formule $T_k = 4l/k\sqrt{gh_0}$ seraient trop grossièrement inexactes. On aura donc intérêt à traiter les golfes et baies de forme très irrégulière de préférence à l'aide de la méthode de GOLDBERG (même chapitre, pp. 59-60), qui présente en outre l'avantage de donner point par point tout le profil de la seiche, déterminant ainsi l'emplacement des ventres et des nœuds avec bien plus de précision que ne le permettrait la méthode japonaise : en effet, cette dernière ne corrige que la période et non pas la fonction propre (assimilée en première approximation à une sinusoïde).

a) Correction d'embouchure. — Le golfe étant supposé de largeur b_0 et de profondeur h_0 uniformes, on a pour l'oscillation fondamentale :

$$\zeta = \zeta_0 \sin \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{2\pi}{T_1} t,$$

d'où, à cause de l'équation de continuité ($\zeta = -h_0 \partial \xi / \partial x$) :

$$\xi = \zeta_0 \frac{2l}{\pi h_0} \cos \frac{\pi x}{2l} \cos \frac{2\pi}{T_1} t.$$

On a alors, pour l'énergie cinétique à l'intérieur du golfe :

$$\mathcal{E}_{\text{INT}} \equiv \frac{1}{2} \rho h_0 b_0 \int_0^l \dot{\xi}^2 dx = \frac{4 \zeta_0^2 b_0 l^3 \rho}{h_0 T_1^2} \sin^2 \frac{2\pi}{T_1} t,$$

et pour l'énergie potentielle :

$$\mathcal{V}_{\text{INT}} \equiv \frac{1}{2} \rho g b_0 \int_0^l \zeta^2 dx = \frac{\zeta_0^2 l b_0 g \rho}{4} \cos^2 \frac{2\pi}{T_1} t.$$

⁽⁷¹⁾ Cf. HONDA, K., TERADA, T., YOSHIDA, Y. and ISITANI, D., *An Investigation on the Secondary Undulations of Oceanic Tides*, Journal of the College of Sc. (Imp. Univ. Tokyo), 24 (1908). Cet exposé original contient de nombreuses fautes d'impressions et manque de clarté au point d'être à peu près inutilisable. On trouvera un bon exposé de la méthode par DEFANT, A., Ann. Hydr., 39 (1911), pp. 120-126, et aussi par CALOI, P., Ann. Geofis., 2 (1949), pp. 222-228.

L'énergie cinétique due au mouvement de l'eau en dehors du golfe ne peut se calculer que de manière approchée. On peut la prendre proportionnelle à l'énergie cinétique à l'embouchure et écrire (B étant un facteur de proportionnalité) :

$$\mathfrak{E}_{\text{EXT}} = \frac{1}{2} \rho B \dot{\xi}_{(x=0)}^2 = \frac{1}{2} \rho B \frac{16 \zeta_0^2 l^2}{h_0^2 T_1^2} \sin^2 \frac{2\pi}{T_1} t.$$

Quant à l'énergie potentielle en dehors du golfe, elle est tellement faible qu'on peut la négliger devant $\mathfrak{E}_{\text{INT}}$.

On doit donc avoir, à tout moment du temps,

$$\mathfrak{E}_{\text{INT}} + \mathfrak{E}_{\text{EXT}} + \mathfrak{E}_{\text{INT}} = c^{te}.$$

Faisons successivement $t = 0$ et $t = T_1/4$: on aura

$$\frac{\zeta_0^2 l b_0 \rho g}{4} = \frac{4 \zeta_0^2 b_0 l^3 \rho}{h_0 T_1^2} + \frac{8 B \zeta_0^2 l^2 \rho}{h_0^2 T_1^2}$$

d'où

$$T_1^2 = \frac{16 l^2}{g h_0} \left(1 + \frac{2 B}{h_0 b_0 l} \right) \quad \text{ou} \quad T_1 = \frac{4 l}{\sqrt{g h_0}} \left(1 + \frac{2 B}{h_0 b_0 l} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{II.12})$$

Il est intéressant de comparer cette correction d'embouchure avec celle proposée par Lord RAYLEIGH pour le tuyau d'orgue ouvert à un bout ⁽⁷²⁾. Soit un tuyau d'orgue de section carrée (de côté a) et de longueur l (très grande devant a). Soit Λ la longueur d'onde du son qu'émettrait le tuyau s'il n'y avait pas à faire intervenir de correction d'embouchure. RAYLEIGH trouve que les vibrations ont lieu comme si l'on avait ajouté à la masse d'air (de densité uniforme, égale à ρ) en mouvement une masse égale à

$$\frac{\rho l a^2}{\pi} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \text{Log} \frac{\pi a}{\Lambda} \right), \quad (\text{II.13})$$

(où γ désigne la constante d'EULER, égale à 0,5772...).

Rapprochons ce résultat de celui de K. HONDA (II.12), en prenant $\Lambda = 4 l$ et en égalant ρB (qui joue précisément le rôle de la masse additionnelle) à l'expression (II.13).

Il vient ainsi, en posant $P = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{3}{2} - \gamma - \text{Log} \frac{\pi b_0}{4 l} \right)$:

$$T_1 = \frac{4 l}{\sqrt{g h_0}} \left(1 + \frac{4 P b_0}{l} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Si T_1 désigne la période (fondamentale) corrigée et T'_1 cette période non corrigée, on a

$$\frac{T_1}{T'_1} = \left(1 + \frac{4 P b_0}{l} \right)^{\frac{1}{2}}$$

comme facteur de correction.

⁽⁷²⁾ Lord RAYLEIGH, *On the Open Organ-Pipe Problem in Two Dimensions*, Phil. Magaz., Ser. 6, vol. 8 (1904), pp. 481 sqq. (= *Scient. Pap.*, V, § 301, p. 206).

Voici la valeur de ce facteur pour quelques valeurs du rapport b_0/l :

$b_0/l = 1$	$1/2$	$1/3$	$1/4$	$1/5$	$1/10$	$1/20$
$T_1/T_1' = 1,320$	$1,261$	$1,217$	$1,187$	$1,163$	$1,106$	$1,064$

On voit que la correction d'embouchure n'est pas toujours négligeable.

b) Correction pour l'irrégularité de la section droite. — Le cas (théoriquement banal et exceptionnel dans la pratique) où les énergies potentielle et cinétique du système sont représentables sous forme quadratique,

$$\mathfrak{W} = \frac{1}{2} \mu q^2 \quad \mathfrak{T} = \frac{1}{2} m \dot{q}^2$$

étant mis à part ⁽⁷³⁾, on peut écrire en général

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l S(x) \xi^2 dx \quad \mathfrak{W} = \frac{1}{2} \rho g \int_0^l b(x) \zeta^2 dx,$$

ou, avec les notations habituelles $\left(u = S \xi, \quad \zeta = -\frac{du}{dv}, \quad v = \int_0^x b(x) dx \right)$,

$$\mathfrak{T} = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \dot{u}^2 dx \quad \mathfrak{W} = \frac{1}{2} \rho g \int_0^l \frac{1}{b(x)} \left(\frac{du}{dx} \right)^2 dx.$$

Posons maintenant

$$u = \sum_k A_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cos \omega_k t,$$

expression de même forme que celle que l'on obtiendrait si $S(x)$ était constant.

Prenons $q_k = A_k \cos \omega_k t$ comme nouvelle coordonnée; on peut alors écrire

$$u = \sum_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot q_k; \quad \dot{u} = \sum_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k; \quad \frac{du}{dx} = \sum_k \frac{k \pi}{l} \cos \frac{k \pi x}{l} \cdot q_k,$$

et l'énergie cinétique prend la forme

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \left[\sum_k \sin \frac{k \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k \right]^2 dx \\ &= \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sum_k \sin^2 \frac{k \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k^2 dx + \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sum_k \sum_{k'} \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k' \pi x}{l} \cdot \dot{q}_k \dot{q}_{k'} dx \\ &= \sum_k \left[\frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx \right] \dot{q}_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \left[\frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin \frac{k \pi x}{l} \sin \frac{k' \pi x}{l} dx \right] \dot{q}_k \dot{q}_{k'} \end{aligned}$$

(où l'on a $k' \neq k$).

⁽⁷³⁾ Dans ce cas, on aurait immédiatement, pour les équations de LAGRANGE : $m\ddot{q} + \mu q = 0$, d'où $q \sim \exp i(\omega t + \alpha)$, où $\omega = \sqrt{\mu/m}$.

De même l'énergie potentielle s'écrit alors :

$$\begin{aligned} \mathfrak{V} &= \frac{1}{2} \rho g \int_0^l \frac{1}{b(x)} \left[\sum_k \frac{k\pi}{l} \cos \frac{k\pi x}{l} \cdot q_k \right]^2 dx \\ &= \sum_k \left[\frac{1}{2} \rho g \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx \right] q_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \left[\frac{1}{2} \rho g \frac{k k' \pi^2}{l^2} \int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos \frac{k\pi x}{l} \cos \frac{k'\pi x}{l} dx \right] q_k q_{k'}. \end{aligned}$$

Si $S(x)$ et $b(x)$ étaient constants, les facteurs $1/S(x)$ et $1/b(x)$ pourraient sortir des signes d'intégration, et les doubles sommes (aux seconds membres de \mathfrak{T} et \mathfrak{V}) s'annuleraient, à cause de l'orthogonalité des sinus et des cosinus. Les coordonnées q_k seraient alors de vraies coordonnées normales, et l'on aurait

$$\mathfrak{T} = \sum_k D_k \dot{q}_k^2 \quad \mathfrak{V} = \sum_k C_k q_k^2.$$

Comme $S(x)$ et $b(x)$ ne sont qu'approximativement constants, mais que l'écart entre le système à étudier et le système « normal » est supposé petit, on posera, comme le fait Lord RALEIGH (74),

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= \sum_k \left[D_k + \Delta D_k \right] \dot{q}_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \Delta D_{kk'} \dot{q}_k \dot{q}_{k'}, \\ \mathfrak{V} &= \sum_k \left[C_k + \Delta C_k \right] q_k^2 + \sum_k \sum_{k'} \Delta C_{kk'} q_k q_{k'}, \end{aligned}$$

où les $\Delta D_{kk'}$ et $\Delta C_{kk'}$ seront d'autant plus petits que le système se rapproche davantage d'un système « normal ». Dans le cas présent, où $S(x)$ et $b(x)$ s'écartent peu de leurs valeurs moyennes, les doubles sommes pourront être négligées.

D'autre part, en vertu du principe de minimum de RAYLEIGH-RITZ (75) on a

$$\omega_k^2 \simeq \frac{C_k + \Delta C_k}{D_k + \Delta D_k};$$

comme

$$C_k + \Delta C_k = \frac{1}{2} \rho g \frac{k^2 \pi^2}{l^2} \int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx,$$

$$D_k + \Delta D_k = \frac{1}{2} \rho \int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx,$$

on aura

$$T_k^2 \simeq \frac{4 l^2}{k^2 g} \cdot \frac{\int_0^l \frac{1}{S(x)} \sin^2 \frac{k\pi x}{l} dx}{\int_0^l \frac{1}{b(x)} \cos^2 \frac{k\pi x}{l} dx}.$$

(74) Cf. Lord RALEIGH, *Theory of Sound*, I, § 90.

(75) *Id.*, *ibid.*, COLLATZ, L., *Eigenwertprobleme u. Num. Behandl.*, pp. 244 sqq.

Cette dernière formule n'est cependant pas d'un usage pratique, car $S(x)$ et $b(x)$ sont en général inconnues sous forme analytique. On peut néanmoins, puisque ces deux grandeurs s'écartent peu de leurs valeurs moyennes, les représenter par :

$$S(x) = S_0 + \Delta S(x) \quad b(x) = b_0 + \Delta b(x).$$

Par suite on prendra :

$$T_k^2 = \frac{4 l^2 b_0}{k^2 g S_0} \cdot \frac{\int_0^l \left(1 - \frac{\Delta S}{S_0}\right) \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx}{\int_0^l \left(1 - \frac{\Delta b}{b_0}\right) \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx},$$

ou, en négligeant les produits et carrés de $\Delta S(x)$ et $\Delta b(x)$,

$$T_k^2 = \frac{4 l^2}{k^2 g h_0} \cdot \frac{\int_0^l \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx} \cdot \left\{ 1 - \frac{\int_0^l \frac{\Delta S}{S_0} \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx}{\int_0^l \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx} + \frac{\int_0^l \frac{\Delta b}{b_0} \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx}{\int_0^l \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx} \right\}$$

(où l'on a posé $S_0/b_0 = h_0$).

Remarquant que

$$\int_0^l \sin^2 \frac{k \pi x}{l} dx = \int_0^l \cos^2 \frac{k \pi x}{l} dx = \frac{l}{2},$$

on peut écrire :

$$T_k^2 = \frac{4 l^2}{k^2 g h_0} \left\{ 1 - \frac{1}{l S_0} \int_0^l \Delta S(x) dx + \frac{1}{l S_0} \int_0^l \Delta S(x) \cos \frac{2 k \pi x}{l} dx + \frac{1}{l b_0} \int_0^l \Delta b(x) dx + \frac{1}{l b_0} \int_0^l \Delta b(x) \cos \frac{2 k \pi x}{l} dx \right\},$$

mais, puisque S_0 et b_0 sont les valeurs moyennes de $S(x)$ et de $b(x)$, on a

$$\int_0^l \Delta S(x) dx = 0, \quad \int_0^l \Delta b(x) dx = 0.$$

De plus, $l b_0 = a$, aire totale du golfe, et $l S_0 = V$, volume total de l'eau qu'il contient.

On pourra donc écrire

$$T_k = \frac{2 l}{k \sqrt{g h_0}} \left[1 + \frac{1}{2} \int_0^l \left(\frac{\Delta S(x)}{V} + \frac{\Delta b(x)}{a} \right) \cos \frac{2 k \pi x}{l} dx \right]. \quad (\text{II.14})$$

C'est la formule de correction cherchée, qui tient compte à la fois des variations de section droite et des variations de largeur. L'expérience montre qu'un rétrécissement (élargissement) de la partie centrale allonge (raccourcit) la période, et qu'un rétrécissement (élargissement) à une extrémité la raccourcit (l'allonge).

§ 10. APERÇU DE QUELQUES TRAVAUX RÉCENTS SUR LES SEICHES.

Depuis 1946 environ, une remarquable équipe de chercheurs italiens, sous la direction du Prof. P. CALOI de l'« Istituto Nazionale di Geofisica » à Rome, s'occupe de l'étude (théorique et expérimentale) des seiches dans les lacs italiens et publie régulièrement ses résultats dans les « Annali di Geofisica », revue de l'Istituto susdit, fondée en 1948.

Une douzaine au moins de lacs d'importance diverse ont ainsi été étudiés : lacs Albano, Bolsena, de Garde, Idro, Iseo, Levico, de Lugano, Majeur, Orta, Santa Croce, Scanno, Vico.

En règle générale, trois méthodes sont mises en œuvre : celle de CHRYSTAL, celle de DEFANT et celle de HIDAOKA; lorsque la forme du lac permet de considérer l'existence d'un bassin ouvert plus ou moins autonome, on applique à ce dernier le procédé de GOLDBERG; c'est le cas notamment pour le golfe de Desenzano dans le lac de Garde.

La méthode de CHRYSTAL, comme il ressort des considérations du chapitre I, est la plus difficile à appliquer. Quand elle n'est pas de forme trop capricieuse, les auteurs décomposent la courbe normale (cf. p. 24) du lac en segments de droite ou de courbes et raccordent les solutions correspondantes, ce qui conduit à des équations aux périodes que l'on doit résoudre par tâtonnements.

Si le nombre de segments dont se composerait ainsi la courbe normale est trop élevé (quatre ou cinq par exemple), les auteurs renoncent habituellement à employer cette première méthode.

Dans l'application de la méthode de RITZ-HIDAOKA, le nombre de fonctions d'essai $\psi_i(v)$ ne dépasse guère trois, pour des raisons pratiques évidentes. Ces fonctions sont invariablement prises égales à $z(1-z)$, $z^2(1-z)$, $z^3(1-z)$ ($z=v/a$), fonctions préconisées par K. HIDAOKA, et qui se prêtent relativement bien au calcul numérique des intégrales

$$\int_0^1 \frac{\psi_i \psi_j}{\sigma(z)} dz \quad (i, j = 1, 2, 3 \dots),$$

mais n'ont pas leurs dérivées orthogonales entre elles (cf. p. 54). Aussi les solutions approchées $u = \sum A_i \psi_i(z)$, que les auteurs obtiennent pour l'équation de CHRYSTAL, s'écartent-elles de plus en plus de celles que fournit la méthode de DEFANT à mesure que croît le nombre de nœuds de la seiche.

La méthode de DEFANT enfin, toujours applicable aux cas que l'on rencontre dans la pratique, est utilisée avec grand soin par les auteurs. Ils effectuent avec précision leurs mesures bathymétriques, multiplient le nombre de sections droites (pas moins de 66 par exemple pour le lac de Garde, long de 50 km mais de forme très régulière dans la plus grande partie de sa longueur; 19 pour le lac d'Albano, de forme à peu près elliptique, long de 3,5 km et large de 2,5 km

environ; 32 pour le lac d'Orta, long de 13,4 km sur 2,5 km de largeur maximum, etc.). Par contre, au lieu de « couper » les baies latérales parfois étendues mais de très faible profondeur et auxquelles par suite l'hypothèse du parallélisme des tranches ne peut guère s'appliquer, les auteurs les font toujours entrer dans leurs calculs. A ce propos, le cas du lac de Lugano ⁽⁷⁶⁾ est typique. Il est probable toutefois que ceci n'affecte qu'assez faiblement les résultats numériques.

D'autre part, un moyen de contrôle intéressant des résultats n'est pas utilisé par les auteurs : c'est la vérification de l'orthogonalité des fonctions propres obtenues. On a vu plus haut (cf. p. 29) que les fonctions $u_1, u_2 \dots$ sont orthogonales entre elles au sens généralisé, c'est-à-dire que l'on a, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \frac{u_i u_j}{\sigma(v)} dv = 0 \quad (i \neq j) \quad \text{ou} \quad 1 \quad (i = j).$$

Or, la méthode de DEFANT présente sur celles de HIDAHA et de CHRYSTAL l'avantage de fournir point par point les fonctions $u_1, u_2 \dots$. Il était donc tout indiqué de calculer les intégrales en question et de les normer (en les posant égales à 1 pour $i = j$), afin de vérifier cette importante propriété des fonctions propres.

Enfin, les auteurs n'insistent guère sur la supériorité de la méthode d'existence de DEFANT sur les procédés de CHRYSTAL et de HIDAHA, non seulement au point de vue du calcul numérique, mais aussi au point de vue théorique. En effet, la solution construite point par point d'après cette méthode est rigoureuse pour n'importe quel mode normal, dans la mesure où l'on peut négliger les erreurs commises en remplaçant les différentielles par des différences finies. La méthode de RITZ-HIDAHA, au contraire, n'est qu'un procédé d'approximation pour les valeurs propres du paramètre λ , et beaucoup moins bon si l'on s'en sert pour chercher les fonctions propres; souvent excellente pour la valeur propre la plus basse, elle donne des résultats de plus en plus médiocres à mesure qu'on l'applique à la recherche de valeurs propres plus élevées; quant aux fonctions propres qu'elle permet d'obtenir, elles sont certainement moins exactes que celles qu'on peut construire point par point par une méthode d'existence.

En ce qui concerne la méthode de CHRYSTAL, remarquons seulement qu'elle nécessite presque toujours une simplification excessive de la courbe normale du lac pour qu'on puisse procéder à des calculs numériques : en effet, c'est par des raccords de solutions que l'on aboutit à l'équation aux périodes, fort compliquée; cela ne peut manquer d'affecter les périodes, dans une mesure peut-être faible, mais difficilement prévisible; sur ce dernier point aussi, la méthode de DEFANT apparaît donc bien supérieure.

(76) MARCELLI, L., *Sesse del Lago di Lugano*, Ann. Geof., 1 (1948), pp. 454-475.