

DEUXIÈME PARTIE

Les seiches transversales.

CHAPITRE PREMIER.

THÉORIE GÉNÉRALE.

§ 1. EXTENSION À DEUX DIMENSIONS DE L'ÉQUATION DE CHRYSTAL.

La théorie de CHRYSTAL, qui traite le problème des seiches longitudinales dans un lac-canal comme un problème à une seule dimension horizontale, ne peut pas, de ce fait, tenir compte de la forme de la section droite (supposée en toute généralité variable le long du Talweg) : seule intervient l'aire de cette section droite, ainsi qu'il ressort de l'équation obtenue par CHRYSTAL :

$$\frac{d^2u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0. \quad (\text{I.10})$$

La dénivellation ζ est donc supposée avoir la même valeur le long des lignes $v = v_i$ (const.), perpendiculaires au Talweg et orthogonales aux rives opposées, et cela d'une rive à l'autre. Si l'on veut étudier le rôle de la forme de cette section droite, négligé par la théorie de CHRYSTAL, il est nécessaire de traiter le problème à deux dimensions horizontales : ζ sera dans ce cas fonction de deux variables horizontales : l'une, x , longitudinale, l'autre, y , transversale — ce qui permet en principe d'envisager en outre l'apparition d'un mouvement oscillatoire transversal.

On peut aisément étendre à deux dimensions l'équation de CHRYSTAL. Au lieu d'une tranche liquide, considérons maintenant une colonne dont la base a pour longueur et largeur dx et dy , et dont la hauteur (égale à la profondeur du bassin) sera en général fonction de x et de y : $h = h(x, y)$.

L'équation de continuité s'obtient en écrivant que le volume de la colonne

se conserve au cours d'un déplacement (ξ, η) ; on a donc (comme précédemment, cf. pp. 14 sqq.) :

$$h(x, y) dx dy = [h(x + \xi, y + \eta) + \zeta] \left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) dx \cdot \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right) dy,$$

d'où

$$\zeta = \frac{h(x, y)}{\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right) \cdot \left(1 + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)} - h(x + \xi, y + \eta),$$

ou

$$\zeta = h(x, y) \cdot \left[1 - \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial \eta}{\partial y} + \dots\right] - h(x, y) - \xi \frac{\partial h}{\partial x} - \eta \frac{\partial h}{\partial y} - \dots$$

(en négligeant les termes supérieurs du développement de McLAURIN, $h(x, y)$ étant supposé « peu variable » avec x et y), ou encore :

$$\zeta = - \frac{\partial}{\partial x} [h(x, y) \cdot \xi] - \frac{\partial}{\partial y} [h(x, y) \cdot \eta].$$

Posons enfin $h(x, y) \cdot \overrightarrow{(\xi, \eta)} = \Phi$ (vecteur surface balayée par la colonne de base infiniment petite $dx dy$, au cours de son déplacement); il vient :

$$\zeta = - \operatorname{div} \Phi. \quad (\text{VI.1})$$

Pour l'équation du mouvement on a, séparément ⁽⁹¹⁾

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial y},$$

ou, puisque le mouvement est périodique,

$$\omega^2 \xi = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}; \quad \omega^2 \eta = g \frac{\partial \zeta}{\partial y}.$$

Multiplions encore ces deux équations par $h(x, y)$; il vient ainsi (en posant comme d'habitude $\omega^2/g = \lambda$) :

$$\lambda \Phi = h(x, y) \cdot \operatorname{grad} \zeta. \quad (\text{VI.2})$$

Éliminant ξ ou Φ entre (VI.1) et (VI.2), il vient respectivement

$$\operatorname{grad} \operatorname{div} \Phi + \frac{\lambda \Phi}{h(x, y)} = 0 \quad (\text{VI.3})$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[h(x, y) \frac{\partial \zeta}{\partial y} \right] + \lambda \zeta = 0. \quad (\text{VI.4})$$

Reste à fixer les conditions-frontière.

⁽⁹¹⁾ Cf. LAMB, H., *Hydrodynamics*, (1945), p. 282.

Si le lac est bordé de toutes parts par des parois verticales, on devra avoir, tout le long de son contour, $\Phi = 0$ (pour équation VI.3) et $\partial\zeta/\partial n = 0$ (pour l'équation VI.4). Si au contraire le lac présente des côtes en pente inclinée, on aura la condition :

$$(\vec{\xi}, \vec{\eta}) \cdot \frac{\partial h}{\partial n} + \zeta(x, y) = 0.$$

§ 2. ÉTUDE DE QUELQUES LACS DE LARGEUR CONSTANTE ET DE PROFONDEUR VARIABLE.

Sous cette forme très simple, le problème a été posé par K. HIDAOKA, qui y consacre trois articles assez brefs ⁽⁹²⁾. Voici l'essentiel des résultats obtenus par cet auteur. Nous modifions quelque peu ses notations.

a) Lac de profondeur variable en x seulement : $h(x, y) = h_0(1 - x^2/a^2)$ (origine de l'axe Ox au milieu du bassin), et de largeur b_0 (ce qui entraîne $-b_0/2 \leq y \leq b_0/2$), en écrivant b_0 au lieu de $2b_0$, afin d'éviter un désaccord avec nos propres notations aux §§ 3-4.

L'équation (VI.4) devient dans ce cas :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \left(1 - \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0, \quad (\text{VI.5})$$

et les conditions-frontière s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{y=\pm b_0/2} = 0; \quad 2h_0 \xi(a) - a\zeta(a) = 0; \quad 2h_0 \xi(-a) + a\zeta(-a) = 0.$$

Prenons, pour résoudre l'équation (VI.5), des solutions

$$\zeta = \cos \frac{p \pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (p \text{ entier pair})$$

$$\zeta = \sin \frac{q \pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (q \text{ entier impair}).$$

⁽⁹²⁾ Cf. HIDAOKA, K., *Tidal Oscillations in a Rectangular Basin of Variable Depth*, Mem. Imp. Mar. Obs., V, 1 (1932), pp. 15-23; VI, 3 (1937), pp. 259-277; Geophys. Mag., 5 (1932), pp. 265-271.

Le cas du bassin de profondeur constante (problème des seiches à deux dimensions) a été traité en détail par H. LAMB, *op. cit.*, p. 284; il trouve $\zeta = \sum_m \sum_n A_{mn} \cos(m\pi x/a) \cos(n\pi y/b)$ (a, b dimensions du bassin selon Ox, Oy respectivement) et $\omega^2/gh_0 = \pi^2(m^2/a^2 + n^2/b^2)$, résultat classique bien connu.

Introduisons-les dans (VI.5); il vient, en écrivant r pour p et q :

$$\frac{d}{dx'} \left[(1 - x'^2) \frac{dw}{dx'} \right] + \left[\frac{\beta_r^2 - 1}{\alpha_r^2} + \frac{x'^2}{\alpha_r^2} \right] w(x') = 0, \quad |x'| < 1$$

où l'on a posé

$$x/a = x'; \quad b_0/r\pi a = \alpha_r; \quad \alpha_r \omega a / \sqrt{gh_0} = \beta_r.$$

Supposons que $w(x)$ puisse se mettre sous la forme

$$w(x') = \sum_{i=0}^{\infty} A_i P_i(x'),$$

où les A_i sont des constantes et les $P_i(x')$ des polynômes de LEGENDRE; on obtient alors, en introduisant ce développement de $w(x')$ dans l'équation ci-dessus, des relations de récurrence entre trois coefficients A_i de même parité, dont on déduit les équations aux valeurs propres du problème. Les solutions se répartissent en deux classes, symétrique et antisymétrique, correspondant aux polynômes de LEGENDRE d'ordre respectivement pair et impair. Pour le détail des solutions, nous renvoyons à l'article de K. HIDAOKA⁽⁹³⁾. Relevons cependant quelques valeurs propres : $a\sqrt{\lambda}/h_0$ a pour valeurs, dans le cas du bassin carré :

	$(r = 0)$	$(r = 1)$	$(r = 2)$
$(i = 1)$	0,9003 $\pi/2$	1,155 $\pi/2$	2,219 $\pi/2$
$(i = 2)$	1,559 $\pi/2$	1,547 $\pi/2$	2,620 $\pi/2$
$(i = 3)$	2,205 $\pi/2$	1,993 $\pi/2$	2,957 $\pi/2$

La comparaison avec un bassin carré de même surface et de profondeur constante, égale à $2h_0/3$, de manière que le volume de l'eau contenue dans les deux bassins soit le même, montre que pour certains modes la période d'oscillation est allongée, et que pour d'autres elle est raccourcie, sans qu'on puisse apercevoir de relation simple entre la valeur des indices et la modification de période subie par le mode correspondant; la table suivante donne le rapport des fréquences du bassin de profondeur variable à celles du bassin de profondeur constante :

	$(r = 0)$	$(r = 1)$	$(r = 2)$
$(i = 1)$	1,103	1,001	1,216
$(i = 2)$	0,9549	0,8473	1,135
$(i = 3)$	0,9003	0,7727	1,005

⁽⁹³⁾ HIDAOKA, K., *Tidal Oscillations...*, Mem. Imp. Mar. Obs., V, 1 (1932), pp. 15-23.

b) Lac de profondeur $h(x, y) = h_0(1 - x/a)$ (origine de l'axe $0x$ au milieu du bassin), et de largeur b_0 , d'où à nouveau $-b_0/2 \leq y \leq b_0/2$.

L'équation (VI.4) devient :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0, \quad (\text{VI.6})$$

et les conditions-frontière s'écrivent :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{y=\pm b_0/2} = 0; \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)_{x=-a} = 0; \quad a\zeta(a) - h_0\xi(a) = 0,$$

ou, en remarquant que $\lambda\xi = \partial\zeta/\partial x$:

$$\lambda a\zeta(a) - h_0\xi'(a) = 0.$$

Prenons, pour résoudre (VI.6), des solutions

$$\zeta = \cos \frac{p\pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (p \text{ entier pair})$$

$$\zeta = \sin \frac{q\pi y}{b_0} \cdot w(x), \quad (q \text{ entier impair}).$$

L'équation prend alors la forme (en écrivant r pour p et q) :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{a}\right) \frac{dw}{dx} \right] + \left[\frac{\lambda}{h_0} - \left(\frac{r\pi}{b_0}\right)^2 \left(1 - \frac{x}{a}\right) \right] w = 0, \quad (\text{VI.6}')$$

ou, en posant $r\pi a/b_0 = \beta_r$, $2\beta_r(1 - x/a) = x'$:

$$\frac{d}{dx'} \left[x' \frac{dw}{dx'} \right] + \left[\frac{\lambda}{h_0} \cdot \frac{a^2}{2\beta_r} - \frac{1}{4} x' \right] w = 0.$$

Elle admet pour solutions

$$w(x') = e^{-\frac{1}{2}x'} \cdot \mathfrak{W} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda a^2}{2h_0\beta_r}, 1, x' \right),$$

où $\mathfrak{W}(\alpha, \gamma, x')$ désigne la fonction hypergéométrique confluyente de WHITTAKER⁽⁹⁴⁾. Comme $x'=0$ pour $x=a$, la dernière condition-frontière est satisfaite automatiquement (il suffit de faire $x=a$ dans l'équation (VI.6), pour trouver la condition-frontière en question). La seconde condition-frontière s'écrit :

$$\left(\frac{dw}{dx'}\right)_{x'=4\beta_r} = 0.$$

⁽⁹⁴⁾ Cf. WHITTAKER, E. and WATSON, N., *Modern Analysis*, 4^e éd, 1950, chap. XVI, pp. 337-354.

A l'aide des relations classiques :

$$\frac{d}{dx} \left[\mathfrak{N}(\alpha, \gamma, x) \right] = \frac{\alpha}{\gamma} \mathfrak{N}(\alpha + 1, \gamma + 1, x);$$

$$\alpha \mathfrak{N}(\alpha + 1, \gamma + 1, x) = (x - \gamma) \mathfrak{N}(\alpha, \gamma + 1, x) + \gamma \mathfrak{N}(\alpha, \gamma, x),$$

on en tire l'équation aux périodes :

$$\mathfrak{N}(-\alpha_r, 1, 4\beta_r) - 2(1 + \alpha_r) \mathfrak{N}(-\alpha_r, 2, 4\beta_r) = 0, \quad (\text{VI.7})$$

où $\alpha_r = \frac{\lambda a^2}{2\beta_r h_0} - \frac{1}{2}$. Cette équation possède une infinité de racines positives $\alpha_r = \alpha_{rs}$ ($s=1, 2, \dots$). Soit α_{rs} la s^{e} racine : on a alors immédiatement

$$\frac{\lambda_r}{h_0} = \frac{2r\pi}{ab_0} \left(\alpha_{rs} + \frac{1}{2} \right),$$

formule qui correspond à celle donnée par H. LAMB pour le bassin rectangulaire de profondeur constante (cf. p. 170, note 92).

Dans le cas particulier où $r=0$, la fonction $\mathfrak{N}(-\alpha_r, 1, x')$ se réduit à une fonction de BESSEL; en effet, l'équation en $w(x)$ devient alors :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 - \frac{x}{a} \right) \frac{dw}{dx} \right] + \frac{\lambda}{h_0} w = 0.$$

Si l'on veut des solutions finies en $x=a$, on doit prendre

$$w(x) = J_0(2\sqrt{\lambda} \cdot \sqrt{1-x/a}).$$

Quand $r=1$, on a une ligne nodale coïncidant avec l'axe $0x$, et s lignes nodales perpendiculaires.

Cas $r=1, s=0$; K. HIDAOKA trouve $\alpha_{10} \simeq 0$, d'où

$$\frac{\lambda}{h_0} \simeq \frac{\pi}{ab_0}$$

et par suite

$$T_{10} \simeq \frac{2b_0}{\sqrt{gh_0}} \sqrt{\pi a/b_0},$$

alors que dans le cas de la profondeur uniforme h_0 (égale à la profondeur moyenne du lac de profondeur variable), on avait (formule de MERIAN) :

$$T_1 = \frac{2b_0}{\sqrt{gh_0}}.$$

Dans le cas de la profondeur variable, le rapport des dimensions du bassin ($2a, b_0$) influence donc les périodes d'oscillation : il s'agit bien d'un problème à deux dimensions horizontales.

Pour $r=1, s=1$, on a $\alpha_{11}=0,9942$, et l'on obtient $\lambda/h_0=9,3886/ab_0$. Pour le bassin de profondeur constante, h_0 , on avait (cf. p. 170, note 92) :

$$\frac{\lambda}{h_0} = \pi^2 \left(\frac{1}{4a^2} + \frac{1}{b_0^2} \right).$$

La période du bassin de profondeur variable est donc toujours plus longue que celle du bassin de profondeur constante (cf. les conclusions des pp. 45-46).

c) Lac rectangulaire de dimensions a, b , et de profondeur

$$h(x, y) = h_0 \left(1 - \frac{4x^2}{a^2} \right) \left(1 - \frac{4y^2}{b^2} \right).$$

L'équation en ζ s'écrit (en posant $2x/a=x', 2y/b=y'$) :

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[(1-x'^2)(1-y'^2) \frac{\partial \zeta}{\partial x'} \right] + \frac{a^2}{b^2} \frac{\partial}{\partial y'} \left[(1-x'^2)(1-y'^2) \frac{\partial y'}{\partial \zeta} \right] + \frac{\lambda a^2}{4h_0} \zeta = 0. \quad (\text{VI.8})$$

Les conditions-frontière sont :

$$\left\{ \begin{array}{l} \zeta + \frac{2}{a} \frac{\partial h}{\partial x'} \xi = 0, \quad \text{en } x' = \pm 1, \\ \zeta + \frac{2}{b} \frac{\partial h}{\partial y'} \eta = 0, \quad \text{en } y' = \pm 1, \end{array} \right.$$

ou, à cause des équations du mouvement :

$$\frac{\lambda a^2}{4} \zeta + \frac{\partial h}{\partial x'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x'} = 0 \quad \text{en } x' = \pm 1; \quad \frac{\lambda b^2}{4} \zeta + \frac{\partial h}{\partial y'} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial y'} = 0 \quad \text{en } y' = \pm 1.$$

Pour résoudre (VI.8), K. HIDAOKA pose

$$\zeta = \sum_i^{\infty} \sum_j^{\infty} A_{ij} P_i(x') P_j(y')$$

(tous les i et tous les j étant séparément de même parité). Introduisant cette expression dans l'équation, il obtient une relation de récurrence entre cinq coefficients : $A_{i-2j}, A_{i,j-2}, A_{i,j}, A_{i,j+2}, A_{i+2,j}$. Si l'on arrête le développement après m termes en $P_i(x')$ et n termes en $P_j(y')$, il y aura en tout mn coefficients A_{ij} , et le déterminant-équation aux valeurs propres sera d'ordre mn .

K. HIDAOKA calcule quelques valeurs propres. En se contentant de prendre

$m=n=1$, il trouve, pour le mode le plus bas, antisymétrique par rapport à $0y'$ et symétrique par rapport à $0x'$: $\lambda a^2/4 = 4h_0/3$ (indépendamment du rapport a/b). En approximation supérieure ($m=n=2$) on a $\lambda a^2/4 = 1,279 h_0$ (pour $a/b=2$); $1,1338 h_0$ (pour $a/b=1$); $0,820 h_0$ (pour $a/b=1/2$).

En troisième approximation ($m=n=3$), les résultats sont respectivement : $\lambda a^2/4 = 1,272 h_0$; $1,103 h_0$; $0,726 h_0$.

Comparons ces résultats à ceux qu'on obtiendrait pour un bassin de profondeur constante en y , et dont la profondeur maxima serait égale à $2h_0/3$ (de manière à ce que le volume d'eau soit le même que dans un bassin parabolique en y). L'équation (VI.8) se réduit alors à :

$$\frac{\partial}{\partial x'} \left[(1-x'^2) \cdot \frac{2}{3} h_0 \frac{\partial \zeta}{\partial x'} \right] + \frac{\lambda a^2}{4} \zeta = 0.$$

On a immédiatement, pour le mode fondamental (à un seul nœud en $0x'$) :

$$\zeta = A_1 P_1(x'), \quad \frac{\lambda a^2}{4} = \frac{4}{3} h_0.$$

C'est vers cette dernière valeur que tend $\lambda a^2/4$ lorsque le rapport a/b croît, c'est-à-dire lorsque le mouvement selon $0x'$ devient prépondérant; il y a ainsi « raccordement » entre le problème à deux dimensions et celui à une seule.

§ 3. LACS DE LARGEUR VARIABLE ET DE PROFONDEUR CONSTANTE.

Supposons que la largeur $b(x)$ du lac ne varie que lentement avec x , c'est-à-dire que b'/b et b''/b' soient négligeables devant l'inverse de l'unité naturelle de longueur, qui est égale à $\Lambda/2\pi$ (Λ = longueur d'onde de la seiche transversale). On verra plus loin l'intérêt de cette restriction, qui permet de simplifier considérablement l'équation aux seiches.

La profondeur se réduisant à une constante h_0 , l'équation (VI.4) peut s'écrire :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0.$$

Par suite de l'hypothèse faite sur $b(x)$, on aura $\partial \zeta / \partial n \simeq \partial \zeta / \partial y$, de sorte que la condition-frontière se réduit à $\partial \zeta / \partial y = 0$.

Posons donc, afin de satisfaire immédiatement à cette condition :

$$\zeta = \cos \frac{p \pi y}{b(x)} \cdot w(x), \quad (p = \text{entier pair}),$$

ou

$$\zeta = \sin \frac{q \pi y}{b(x)} \cdot w(x), \quad (q = \text{entier impair}),$$

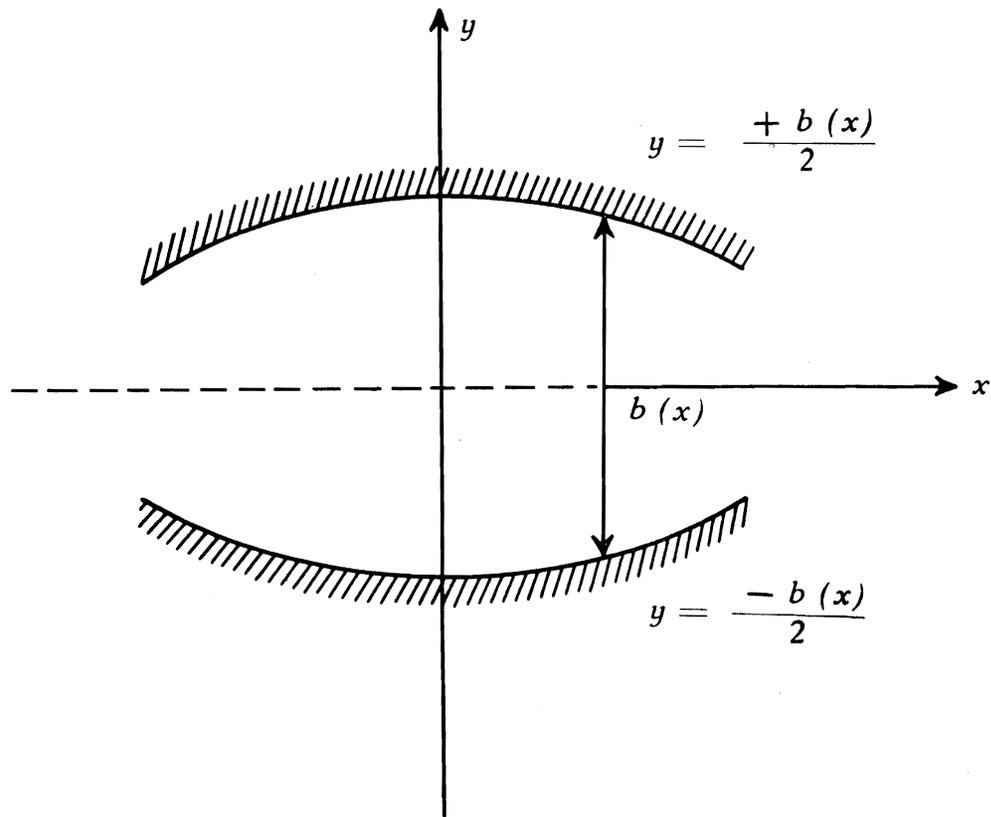


FIG. 33.

p et q désignant le nombre de nœuds transversaux de la seiche; l'axe Ox est équidistant des deux rives entre lesquelles ont lieu les seiches transversales, et l'on a, comme plus haut,

$$-\frac{b(x)}{2} \leq y \leq \frac{b(x)}{2}.$$

L'amplitude ζ de la seiche est ainsi modulée longitudinalement par la fonction $w(x)$.

Introduisant ζ ainsi défini dans l'équation ci-dessus, et écrivant r pour p et q , il vient (en négligeant $(b'/b)^2$ et $b'' b'/b'b$ devant $4\pi^2/\Lambda^2$) :

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left[\frac{\lambda}{h_0} - \frac{\gamma^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w(x) = 0. \quad (\text{VI.9})$$

Suivant que l'expression

$$\frac{\lambda}{h_0} - \frac{\gamma^2 \pi^2}{b^2(x)}$$

est positive ou négative, la fonction $w(x)$ aura une allure oscillante ou exponentielle amortie. L'apparition de seiches transversales est ainsi conditionnée par les variations de largeur du lac : dans les parties « renflées », $w(x)$ aura une allure oscillante, c'est-à-dire qu'il y aura des seiches, tandis que dans les parties où le lac se rétrécit, $w(x)$ prendra l'allure d'une exponentielle amortie, c'est-à-dire que les seiches s'évanouiront exponentiellement de part et d'autre des régions « renflées » du lac.

On peut encore remarquer que si $b(x)$ tend vers zéro aux extrémités du lac, $w(x)$ devra également y tendre vers zéro ($d^2 w/dx^2$ restant fini !), chose physiquement intuitive : l'amplitude des seiches transversales doit tendre vers zéro dans les zones où la largeur du lac tend vers zéro. Si au contraire $b(x)$ ne s'annule pas aux extrémités (cas d'un lac « tronqué »), la seiche pourra continuer à se manifester aux extrémités, et $w(x)$ y sera en général différent de zéro.

Nous avons pu repérer quelques cas où l'équation (VI.9) admet des solutions exactes.

a) Premier cas :

$$b^2(x) = \frac{b_0^2}{1 + \alpha^2 x^2},$$

b_0 étant la largeur à l'origine ($x=0$), et α étant une constante (ayant pour dimension l'inverse d'une longueur), dont l'ordre de grandeur sera fixé ci-après, compte tenu de la restriction initiale imposée à la largeur variable du lac.

Le champ de la variable x est donné par $-\infty \leq x \leq \infty$ (lac de longueur infinie).

On a $b'/b = -\alpha^2 x/(1 + \alpha^2 x^2)$. Dans quelles conditions cette quantité sera-t-elle négligeable devant $2\pi/\Lambda$? Cette exigence est évidemment remplie lorsque $|x|$ est très petit (au voisinage de l'origine) ou très grand. Pour y satisfaire en général, cherchons pour quelle valeur de x la fonction $|\alpha^2 x/(1 + \alpha^2 x^2)|$ est maximum, et déterminons α de manière à rendre ce maximum négligeable devant $2\pi/\Lambda$. La valeur cherchée de $|x|$ est $1/\alpha$, et le maximum lui-même est $|\alpha/2|$: la condition cherchée est donc $\alpha \ll 4\pi/\Lambda$. On peut montrer que la

seconde restriction ($b''/b' \ll 2\pi/\Lambda$) peut être remplacée par $b''/b \ll 4\pi^2/\Lambda^2$; il suffit pour cela de développer les calculs qui conduisent à l'équation (VI.9).

Cette substitution est toute indiquée dans le cas présent, où b' s'annule à l'origine sans que b'' s'y annule, et où par conséquent $b''/b' \ll 2\pi/\Lambda$ serait irréalisable.

On a

$$\frac{b''}{b} = \frac{\alpha^2(1 - 2\alpha^2 x^2)}{(1 + \alpha^2 x^2)^2},$$

fonction dont le maximum égale α^2 et est atteint pour $x=0$. La condition à imposer ici à α^2 est donc $\alpha^2 \ll 4\pi^2/\Lambda^2$.

Résumant les deux conditions trouvées en une seule, on a $\alpha \ll 2\pi/\Lambda$.

Mais, comme $\Lambda = 2b(x)/r$ pour les seiches transversales (l'unité naturelle de longueur est ainsi $b(x)/r\pi$), il faut donc que l'on ait $\alpha \ll r\pi/b(x)$.

Solution de l'équation (VI.9).

Dans le cas présent elle écrit

$$w'' + \left[\left(\frac{\lambda}{h_0} - \frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} \right) - \frac{r^2 \pi^2 \alpha^2}{b_0^2} x^2 \right] w(x) = 0. \quad (\text{VI.10})$$

Posons $\lambda/h_0 - r^2 \pi^2/b_0^2 = \mu$ (valeur propre du problème).

L'équation (VI.10) n'est autre que celle de SCHRÖDINGER pour l'oscillateur harmonique de la mécanique ondulatoire; ses seules solutions physiquement acceptables ici sont :

$$w_{nr} = e^{-\frac{r\pi\alpha}{b_0} x^2} \cdot H_n \left(x \sqrt{\frac{r\pi\alpha}{b_0}} \right), \quad (\text{VI.11})$$

H_n désignant le n° polynôme d'HERMITE ($n =$ nombre de nœuds longitudinaux).

Les valeurs propres du paramètre μ sont :

$$\mu_{nr} = (2n + 1) \frac{r\pi\alpha}{b_0},$$

ou, en revenant à λ :

$$\lambda_{nr} = \frac{r^2 \pi^2 h_0}{b_0^2} + (2n + 1) \frac{r\pi\alpha h_0}{b_0}.$$

Si l'on veut encore normer les fonctions propres w_{nr} , il suffit de les multiplier par la constante $\left[\sqrt{\frac{r\alpha}{b_0}} \cdot \frac{1}{n! 2^n} \right]^{\frac{1}{2}}$ ⁽⁹⁵⁾.

(95) Cf. PAULING, L. and WILSON, T. B., *Introduction to Quantum Mechanics*, p. 80.

Comparons ces résultats à ceux obtenus pour le lac de profondeur constante h_0 et de largeur constante b_0 . La formule de MERIAN donne, pour les seiches transversales d'un tel lac (supposé de longueur illimitée, comme celui étudié ci-dessus),

$$T_{or} = \frac{2b_0}{r\sqrt{gh_0}} \quad \text{ou} \quad \lambda_{or} = \frac{\pi^2 r^2 h_0}{b_0^2},$$

(on a ici $n=0$, puisqu'on ne considère qu'une seule dimension), alors que la formule trouvée pour le lac de largeur variable donnait (avec $n=0$)

$$\lambda_{or} = \frac{\pi^2 r^2 h_0}{b_0^2} + \frac{r \pi \alpha h_0}{b_0}.$$

Il en résulte que la période propre du lac de largeur variable est plus courte que celle du lac de largeur constante, ainsi qu'on pouvait s'y attendre à cause du rétrécissement de part et d'autre de l'origine.

Pour les seiches sans nœuds longitudinaux, le rapport des périodes est

$$\frac{T_{\text{const.}}}{T_{\text{var.}}} = \sqrt{1 + \frac{\alpha b_0}{r\pi}}.$$

S'il y a des nœuds longitudinaux (pour les seiches du lac de largeur variable seulement !), ce rapport devient

$$\frac{T_{\text{const.}}}{T_{\text{var.}}} = \sqrt{1 + \frac{2n+1}{r} \cdot \frac{\alpha b_0}{\pi}}.$$

La présence de ces nœuds longitudinaux produit donc un effet inverse de celui des nœuds transversaux, puisqu'il accentue l'écart entre les deux périodes, alors que l'augmentation du nombre r de nœuds transversaux tend à réduire cet écart.

b) Deuxième cas :

$$b(x) = b_0 \cos \frac{\pi x}{l},$$

b_0 désignant la largeur du lac à l'origine ($x=0$), et l sa longueur. Le champ de la variable x est donné par $-l/2 \leq x \leq l/2$ (lac de longueur finie).

Dans quelles conditions aura-t-on

$$\frac{b'}{b} \ll \frac{2\pi}{\Lambda} \quad \text{et} \quad \frac{b''}{b} \ll \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} ?$$

On a

$$\frac{b'}{b} = -\frac{\pi}{l} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l}.$$

Par suite, la première inégalité exige

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l} \right| \ll \frac{2l}{\Lambda}$$

ou, puisque $\Lambda = 2b(x)/r$:

$$\left| \operatorname{tg} \frac{\pi x}{l} \right| \ll \frac{rl}{b(x)},$$

ou enfin, à cause de la définition de $b(x)$:

$$\left| \sin \frac{\pi x}{l} \right| \ll \frac{rl}{b_0}.$$

Comme $|\sin(\pi x/l)|$ ne peut dépasser 1, il faudra que l'on ait $b_0 \ll rl$, r étant le nombre (entier et positif) de nœuds transversaux. Il suffit donc que la largeur du lac (à l'origine) soit négligeable devant sa longueur.

La seconde inégalité exige

$$\left| \frac{\pi^2}{l^2} \right| \ll \frac{4\pi^2}{\Lambda^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{l^2} \ll \frac{r^2}{b^2(x)},$$

c'est-à-dire $b^2(x) \ll r^2 l^2$, inégalité automatiquement réalisée dès que l'on a $b_0 \ll rl$.

L'équation (VI.9) prend ici la forme

$$w'' + \left[\frac{\lambda}{h_0} - \frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} \sec^2 \frac{\pi x}{l} \right] w(x) = 0, \quad (\text{VI.12})$$

dont les seules solutions physiquement recevables ici sont :

$$w(x) = \cos^n \frac{\pi x}{l}, \quad (\text{VI.13})$$

où n est un nombre positif supérieur à 1 ⁽⁹⁶⁾, entier ou fractionnaire, défini par $n(n-1) = r^2 l^2 / b_0^2$, équation qui n'admet qu'une seule racine positive.

La condition $b_0 \ll rl$ entraîne que $\sqrt{n(n-1)}$ est un grand nombre; si l'on prend $\sqrt{n(n-1)} \simeq n$, on a $n \simeq \sqrt{rl/b_0}$. Comme la valeur propre λ est donnée par $\lambda = n^2 \pi^2 h_0 / l^2$, valeur (longitudinalement) unique, à cause de l'unicité de n (à chaque valeur de r correspond une seule valeur de n), on a approximativement

$$\lambda \simeq \frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} h_0.$$

⁽⁹⁶⁾ $n < 0$ entraînerait $w \rightarrow \infty$ pour $|x| \rightarrow l/2$; $0 < n < 1$ rendrait w' infini pour $|x| \rightarrow l/2$.

Comme $\lambda \sim T^{-2}$, on voit que $T_r \sim 1/r$, c'est-à-dire que les fréquences sont des multiples entiers de la fréquence fondamentale, du moins à l'approximation adoptée.

D'autre part, plus l est grand devant b_0 , plus aussi n sera considérable : c'est-à-dire, plus le lac se rapproche d'un canal étroit, plus la seiche est concentrée dans une région étroite située de part et d'autre de l'origine. Par exemple, pour $l = 40 b_0$ (en prenant $r=1$), c'est-à-dire $n \simeq 40$, $\cos^n(\pi x/l)$ n'est plus que de l'ordre de 0,015 pour $|x|=5,8 b_0$: la seiche ne sera donc « importante » que dans la région $-5,8 b_0 \leq x \leq 5,8 b_0$ soit dans le quart de la longueur totale du lac. Pour $l = 400 b_0$ ($r=1$), c'est-à-dire $n \simeq 400$, $\cos^n(\pi x/l)$ est inférieur à 0,01 pour $|x|=22 b_0$, de sorte que la région affectée par la seiche n'est plus que le dixième environ de la longueur totale du lac. Apparemment il y a là un paradoxe; en réalité, la signification du phénomène doit être la suivante : des seiches transversales locales sont impossibles dans un lac-canal de largeur et de profondeur constantes. En effet, le cas limite du lac de largeur $b(x) = b_0 \cos(\pi x/l)$, lorsque b_0 devient de plus en plus petit devant l , n'est autre qu'un canal de largeur et de profondeur constantes; la région affectée par les seiches devenant de plus en plus étroite, les seiches locales doivent disparaître complètement à la limite, la zone où elles peuvent se produire devenant nulle à la limite. Des seiches transversales générales au contraire sont possibles dans un lac-canal de largeur et de longueur constantes, mais ceci ne relève plus du problème traité ici : on retombe dans le cas classique du lac rectangulaire de profondeur constante, où le mouvement aurait lieu dans le sens de la « largeur », c'est-à-dire de la plus petite dimension horizontale.

§ 4. CAS DU LAC DE LARGEUR VARIABLE ET DE PROFONDEUR VARIABLE.

Supposons que la profondeur variable h soit une fonction de x seulement : $h = h(x)$; le fond du lac est ainsi une surface cylindrique, dont la génératrice est parallèle à Oy (x =variable longitudinale, y =variable transversale; $-b(x)/2 \leq y \leq b(x)/2$, comme plus haut). Conservons en outre les hypothèses faites précédemment sur la largeur du lac (à savoir b'/b et b''/b' négligeables devant l'inverse de l'unité naturelle de longueur, cf. p. 175); supposons enfin que $h'w'/h(x)$ soit à son tour négligeable devant l'inverse de l'unité naturelle de longueur. Il vient ainsi, en posant comme précédemment :

$$\zeta = \cos \frac{p \pi y}{b(x)} \cdot w(x) \quad (p = \text{entier pair})$$

ou

$$\zeta = \sin \frac{q \pi y}{b(x)} \cdot w(x) \quad (q = \text{entier impair}),$$

$$\frac{d^2 w}{dx^2} + \left[\frac{\lambda}{h(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w(x) = 0, \quad (\text{VI.14})$$

(r désignant p ou q suivant le cas, c'est-à-dire le nombre de nœuds transversaux). C'est la résolution de cette équation, dite « équation en $w(x)$ », qui fournira un premier procédé de calcul des seiches transversales.

§ 5. MÉTHODES NUMÉRIQUES DE RÉOLUTION DE L'ÉQUATION EN $w(x)$.

Les deux méthodes qui vont être exposées dans ce paragraphe nécessitent une « régularisation » préalable du lac, de manière à ce que l'équation à résoudre prenne la forme aisée à traiter :

$$w'' + \left[\frac{\lambda}{h(x)} - \frac{r^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w = 0. \quad (\text{VI.14})$$

La profondeur, qui en général sera fonction de x et de y , devra donc être modifiée de manière à n'être plus fonction que de x seulement, et cela de telle sorte que les périodes transversales soient altérées le moins possible.

Si les sections droites (perpendiculaires au Talweg) sont de forme sensiblement rectangulaire, on pourra se contenter de remplacer dans chacune d'elles la profondeur (variable en y) par une profondeur moyenne $\bar{h}(x)$, définie par $\bar{h}(x) = S(x)/b(x)$. Si au contraire la forme des sections droites en question s'écarte notablement de la forme rectangulaire, on devra calculer pour chacune d'elles une profondeur « réduite » $H(x)$, constante pour chaque section et telle que la période d'oscillation à r nœuds d'un bassin de longueur $b(x)$ et de profondeur $H(x)$ soit égale à la période d'oscillation à r nœuds d'un canal de longueur $b(x)$ et dont la profondeur varie comme celle de la section droite étudiée; en général, cette profondeur « réduite » pourra varier d'un mode à l'autre, et sera dès lors désignée par $H_r(x)$. Le calcul des périodes de chacune des sections droites se fera le plus commodément par la méthode de DEFANT (cf. pp. 56-60); la profondeur « réduite » $H_r(x)$ s'obtient ensuite sans difficulté par la formule de MERIAN. En désignant par $\lambda_r(x)$ la valeur propre $= 4\pi^2/gT_r^2$ du r^{e} mode de la section droite étudiée, on obtient :

$$H_r(x) = \frac{\lambda_r(x) \cdot b^2(x)}{r^2 \pi^2}. \quad (\text{VI.15})$$

Lorsque ces calculs préliminaires sont terminés, le lac se trouve décomposé en bassins de profondeurs « uniformes » (c'est-à-dire indépendantes de y , mais variant en général d'un bassin à l'autre) et de « longueurs » $b(x)$. L'équation en $w(x)$ sera donc bien de la forme (VI.14).

L'étape suivante est la recherche des zones où les seiches transversales peuvent apparaître. On a vu plus haut (p. 177) que l'équation (VI.14) admet des solutions de type oscillant ou de type exponentiel amorti suivant que la fonction $\lambda/h(x) - r^2\pi^2/b^2(x)$ est positive ou négative ($\lambda=4\pi^2/gT^2$ étant pris égal à une de ses valeurs propres). Les seiches apparaîtront donc dans les régions où $H(x)/b^2(x)$ est minimum, et disparaîtront exponentiellement à quelque distance à gauche et à droite de ces minima. Leurs périodes, ou, ce qui revient au même, leurs valeurs propres, seront déterminées par la condition-frontière d'évanescence exponentielle; pratiquement, il suffira évidemment que $w(x)$ et $w'(x)$ tendent exponentiellement vers zéro à quelque distance de part et d'autre des points où H/b^2 est minimum pour qu'on puisse considérer les conditions-frontière comme satisfaites.

La recherche de λ_r se fait par essais successifs, une première valeur d'essai étant fournie, par exemple, par la moyenne des $\lambda_r(x)$ de la région étudiée. On introduit la valeur à essayer dans l'équation (VI.14) et on résout celle-ci par une des deux méthodes suivantes.

a) Première méthode. — Elle repose sur l'emploi des formules de différences finies, du type des formules (II.4-5) ⁽⁹⁷⁾, dont on élimine les dérivées secondes à l'aide de l'équation (VI.14) elle-même, et dont on néglige les termes en Δx^4 , Δx^6 , ... etc., contenant des dérivées d'ordre supérieur au second.

La première des deux formules ci-dessus donne ainsi, en posant pour simplifier, $r^2\pi^2/b^2(x) - \lambda/H(x) = Q(x)$,

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + \Delta x^2 \cdot Q_n \cdot w_n, \quad (\text{VI.16})$$

où Q_n est fonction de x et de λ_r (désormais indépendant de x) : $Q_n = Q(x_n, \lambda_r)$.

A cause de l'inévitable incertitude (erreurs de mesures et imprécision relative des cartes à petite échelle) sur les données bathymétriques, et aussi à cause de la simplification que constitue déjà l'introduction de la profondeur réduite, $H(x)$, il sera en général inutile de recourir à des formules très raffinées, nécessitant des calculs plus longs, plutôt qu'à des formules plus simples et d'emploi plus commode. Des exemples numériques montreront qu'on arrive à des résultats excellents avec la première des deux formules, et cela avec un Δx relativement grand. La délimitation de la région à étudier se fait en pratique au juger; on verra du reste que la méthode est suffisamment stable pour que les résultats numériques ne soient guère affectés par des différences notables dans la manière de délimiter la région à seiches. A cause des conditions-frontière, la valeur initiale de w , soit w_0 , sera prise nulle; w_1 est ensuite choisi arbitrairement, et les valeurs successives w_2, w_3, \dots se calculent sans difficulté à l'aide de la relation (VI.16). Lorsque la fonction $w(x)$ construite ainsi point par point présente une

⁽⁹⁷⁾ Cf. p. 62, et MILNE, W. E., *Numerical Calculus*, pp. 138 sqq.

allure satisfaisante (cf. ci-dessus, page 183), la valeur propre λ_r sera considérée comme suffisamment exacte; les exemples numériques traités plus loin montreront du reste l'extraordinaire sensibilité de la méthode : un écart de quelques ‰ entre deux valeurs d'essai suffit parfois à modifier considérablement l'allure des $w(x)$ correspondants.

b) *Seconde méthode.* — Elle consiste à décomposer l'équation (VI.14) en deux équations différentielles du premier ordre et à résoudre simultanément celles-ci à l'aide d'un schéma de calcul (où les différentielles sont remplacées par des différences finies) entièrement analogue à celui utilisé dans la méthode de DEFANT (cf. pp. 56-60).

L'équation

$$w'' + \left[\frac{\lambda_r}{H(x)} - \frac{\gamma^2 \pi^2}{b^2(x)} \right] w = 0, \quad (\text{VI.17})$$

soumise aux conditions-frontière $w(\pm \infty) = 0$ (décroissance exponentielle de w de part et d'autre de la zone où peuvent apparaître les seiches), peut s'écrire (en négligeant de noter l'indice r de λ)

$$w'' + \frac{w}{\theta(x, \lambda)} = 0,$$

où l'on a posé

$$\frac{1}{\theta(x, \lambda)} = \frac{\lambda}{H(x)} - \frac{\gamma^2 \pi^2}{b^2(x)},$$

ou

$$\theta(x, \lambda) = \frac{b^2(x) \cdot H(x)}{\lambda b^2(x) - \gamma^2 \pi^2 H(x)}.$$

Au cas où le lac ne s'étend pas à l'infini dans les deux directions de l'axe Ox , et où l'une au moins des deux grandeurs $b(x)$ et $H(x)$ s'annule aux extrémités du lac (ce qui y entraîne $\theta(x, \lambda) = 0$, à cause de la définition même de θ), on aura évidemment $w = 0$ aux extrémités, w'' ne pouvant pas y devenir infini.

Posons encore

$$w(x) = \theta(x, \lambda) \cdot \gamma(x) \quad \text{et} \quad \frac{d}{dx} \left[\theta(x, \lambda) \cdot \gamma(x) \right] \equiv \frac{dw}{dx} = -\rho(x, \lambda).$$

L'équation (VI.17) s'écrit alors :

$$-\frac{d\rho}{dx} + \gamma(x) = 0. \quad (\text{VI.18})$$

Remplaçons les différentielles par des différences finies : il vient

$$\Delta\rho = \gamma(x) \cdot \Delta x, \quad \gamma(x) = -\frac{1}{\theta(x, \lambda)} \int_0^x \rho(x, \lambda) dx$$

ou, en différences finies et en supposant numérotés les points de division (x_0, x_1, \dots, x_n) :

$$\gamma_k \equiv \gamma(x_k) = - \frac{1}{\theta(x_k, \lambda)} \sum_{j=0}^k \rho(x_j, \lambda) \Delta x_{j+1}.$$

Les fonctions $\gamma(x)$ et $\rho(x, \lambda)$ peuvent ainsi se calculer aisément point par point; $\theta(x, \lambda)$ est connu à l'aide des mesures bathymétriques effectuées sur le lac, et le paramètre λ est une valeur d'essai. Pour chaque nouvelle valeur de λ que l'on veut essayer, il faut évidemment dresser une nouvelle table de θ .

Le schéma du calcul à suivre pour la résolution de l'équation (VI.18) peut alors se représenter comme suit :

$$\begin{aligned} \rho_k &= \rho_{k-1} + \Delta \rho_k; & (\rho_0 \text{ est choisi arbitrairement}) \\ \Delta \rho_k &= \gamma_k \Delta x_k; & \gamma_k = \frac{w_k}{\theta_k}; & w_k = - \sum_{j=0}^k \rho_j \Delta x_{j+1}; \end{aligned}$$

(les indices se rapportant, comme d'habitude, aux points de subdivision.)

Si l'on compare ce schéma à celui utilisé dans la méthode de DEFANT pour la résolution de l'équation de CHRYSTAL (seiches longitudinales, p. 58) :

$$\frac{d^2 u}{dv^2} + \frac{\lambda u}{\sigma(v)} = 0 \quad [u(0) = u(a) = 0],$$

à savoir :

$$\zeta_k = \zeta_{k-1} + \Delta \zeta_k; \quad \Delta \zeta_k = \lambda \xi_k \Delta x_k; \quad \xi_k = \frac{u_k}{S_k}; \quad u_k = - \sum_{j=1}^k \zeta_j \Delta v_{j+1};$$

on voit que, formellement : x joue le rôle de v (aire de la surface libre, prise comme variable indépendante); $w(x)$ joue le rôle de $u(v)$ (volume d'eau déplacé par la seiche en un quart de période); $\rho(x, \lambda)$ joue le rôle de ζ (élongation verticale); $\theta(x, \lambda)$, celui de $\sigma(v)/\lambda$ [$\sigma = S \cdot b$, S étant l'aire de la section droite, perpendiculaire au Talweg, et b la largeur à la surface libre]; $\gamma(x)$ enfin, celui de $\lambda \xi / b(x)$.

Dans la pratique, l'application de la méthode présente sera un peu moins commode que celle du procédé de DEFANT, puisque pour chaque nouvelle valeur d'essai de λ il faudra dresser une nouvelle table de la fonction $\theta(x, \lambda)$, alors que, dans le procédé de DEFANT, λ est simplement un facteur. Cette complication est inhérente au problème lui-même, et par suite, impossible à éliminer.

Comparons du point de vue théorique les deux méthodes qui viennent d'être exposées.

Dans la première, on utilise la formule $w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} + \Delta x^2 \cdot w''_k + \dots$ (termes qu'on néglige), qui devient, en faisant usage de (VI.17) et en introduisant les notations de la seconde méthode :

$$w_{k+1} = 2w_k - w_{k-1} - \frac{\Delta x^2 \cdot w_k}{\theta_k}. \quad (\text{VI.19})$$

Mais on a posé $w_k = \theta_k \gamma_k$ et $\gamma_k \Delta x = \Delta \rho_k$: il vient ainsi

$$\begin{aligned} w_{k+1} &= 2w_k - w_{k-1} - \Delta \rho_k \cdot \Delta x \\ &= 2w_k - w_{k-1} - (\rho_k - \rho_{k-1}) \Delta x \\ &= 2w_k - w_{k-1} + \Delta w_k - \Delta w_{k-1}. \end{aligned} \quad (\text{VI.20})$$

Par définition, on a $w_k = w_{k-1} + \Delta w_k$; (VI.20) donne dès lors : $w_{k+1} = w_k + (2\Delta w_k - \Delta w_{k-1})$, alors qu'en vertu de la définition on devrait avoir $w_{k+1} = w_k + \Delta w_{k+1}$. On voit donc que l'expression $2\Delta w_k - \Delta w_{k-1}$ joue le rôle de Δw_{k+1} ; autrement dit, c'est comme si la relation (VI.19) avait été appliquée, limitée cette fois à ses deux premiers termes, à Δw_{k+1} lui-même.

Les deux méthodes sont donc bien distinctes. La première notamment nécessite l'emploi d'un Δx constant, ce qui n'est pas requis pour la seconde.

Du point de vue pratique enfin, la première méthode sera nettement plus rapide, bien qu'un peu moins précise que la seconde. Néanmoins, nous verrons plus loin que le supplément de précision auquel on peut aboutir est trop faible pour justifier le supplément considérable de calculs numériques qu'il exige.

c) Application numérique de la première méthode. — Soit un lac dont la largeur est donnée par

$$b^2(x) = \frac{b_0^2(x)}{1 + \alpha^2 x^2}$$

avec : $b_0 = 15$ km, $\alpha = 0,2$ (unités de longueur)⁻¹ (98).

Supposons constante la profondeur h du lac : $h_0 = 200$ m; admettons en outre que le lac soit limité par deux murs plans verticaux, perpendiculaires à $0x$, et situés à 30 km chacun du centre du lac.

L'unité naturelle de longueur, pour la seiche transversale uninodale, est ainsi égale à

$$\frac{b_0}{\pi} = \frac{15 \times 10^5 \text{ cm}}{\pi}, \quad \text{soit près de 4,8 km.}$$

En vertu du résultat obtenu page 178, la valeur propre correspondant à l'oscillation à un nœud transversal ($r=1$) et sans nœuds longitudinaux ($n=0$) est donnée (de manière exacte si le lac s'étendait à l'infini dans les deux directions

(98) On vérifie immédiatement que pour cette valeur de α , les conditions de « faible variation de la largeur $b(x)$ » sont satisfaites (cf. pp. 177-178) :

$$\frac{b'}{b} = -\frac{\alpha^2 x}{1 + \alpha^2 x^2} \quad \text{et} \quad \frac{b''}{b} = \frac{\alpha^2 (1 - 2\alpha^2 x^2)}{(1 + \alpha^2 x^2)^2}$$

sont bien des quantités petites respectivement devant π/b_0 et π^2/b_0^2 .

en x , mais avec une approximation suffisante pour le cas qui nous occupe) par

$$\lambda_{01} = \frac{\pi^2 h_0}{b_0^2} + \frac{\pi \alpha h_0}{b_0},$$

ou

$$\frac{\lambda_{01}}{h_0} = \frac{\pi^2}{b_0^2} \left(1 + \alpha \frac{b_0}{\pi} \right),$$

c'est-à-dire, puisque $\alpha = 0,2\pi/b_0$,

$$\frac{\lambda_{01}}{h_0} = 1,2 \cdot \frac{\pi^2}{b_0^2}.$$

On en tire : $T^2 = 4b_0^2/1,2gh_0 = 0,382263 \times 10^6 \text{ sec}^2$, c'est-à-dire : $T = 618,27 \text{ sec}$.

Divisons le lac en dix tronçons égaux (suivant l'axe $0x$); on a donc $\Delta x = 0,4 \pi$ unités de longueur = $0,4 b_0 = 6 \text{ km}$.

En prenant comme valeur d'essai de λ_{01} la valeur exacte $1,2 h_0 \pi^2 / b_0^2$, on aura la table suivante, où l'on a calculé $w(x)$ à l'aide de la formule

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + \Delta x^2 \cdot Q_n \cdot w_n.$$

Comme

$$Q(x) \equiv \frac{\pi^2}{b^2(x)} - \frac{\lambda}{h_0} = \frac{\pi^2}{b_0^2} [(1 + \alpha^2 x^2) - 1,2], \quad \Delta x^2 = 0,16 \pi^2 \cdot \frac{b_0^2}{\pi^2},$$

cette formule peut s'écrire

$$w_{n+1} = 2w_n - w_{n-1} + 0,16 \pi^2 (\alpha^2 x_n^2 - 0,2) w_n.$$

Section n°	x (en unités b_0)	$(\alpha^2 x^2 - 0,2)$ (nombre pur)	$w(x)$ (en unités de longueur arbitraires)
0	-2,00	1,379137	0
1	-1,60	0,810647	1
2	-1,20	0,368489	3,280123
3	-0,80	0,052662	7,468932
4	-0,40	-0,136835	12,278861
5	0,00	-0,200000	14,435559
6	0,40	-0,136835	12,033112
7	0,80	0,052662	7,030536
8	1,20	0,368489	2,612623
9	1,60	0,810647	-0,285019
10	2,00	1,379137	-3,547520

L'allure de $w(x)$ dans les dernières sections du lac (8-9-10) n'étant pas satisfaisante (il ne peut pas y avoir de nœud longitudinal!), il y a lieu de recommencer avec une autre valeur d'essai pour λ_{01} .

Prenons $\lambda_{01} = 1,19 \times h_0 \pi^2 / b_0^2$ ($T \simeq 620,87$ sec). On obtient alors la table suivante :

Section n°	x (en unités b_0)	$(\alpha^2 x^2 - 0,19)$ (nombre pur)	$w(x)$ (en unités de longueur arbitraires)
0	-2,00	1,389137	0
1	-1,60	0,820647	1
2	-1,20	0,378489	3,295914
3	-0,80	0,062662	7,561750
4	-0,40	-0,126835	12,575835
5	0,00	-0,190000	15,071108
6	0,40	-0,126835	13,044505
7	0,80	0,062662	8,405220
8	1,20	0,378489	4,597647
9	1,60	0,820647	3,538023
10	2,00	1,389137	7,063373

On voit que cette fois-ci, au lieu de décroître exponentiellement, $w(x)$ recommence à croître dans les dernières sections du lac; il faudra donc corriger à nouveau λ_{01} , mais dans l'autre sens. Remarquons l'extrême sensibilité de la méthode : un écart de moins de 1 % entre les deux valeurs de λ_{01} suffit à modifier entièrement l'allure de $w(x)$ à l'extrémité du lac.

Prenons maintenant $\lambda_{01} = 1,197 \times h_0 \pi^2 / b_0^2$ ($T = 619,05$ sec.).

On trouve alors :

Section n°	x (en unités b_0)	$(\alpha^2 x^2 - 0,197)$ (nombre pur)	$w(x)$ (en unités de longueur arbitraires)
0	-2,00	1,382137	0
1	-1,60	0,813647	1
2	-1,20	0,371489	3,284860
3	-0,80	-0,055662	7,496724
4	-0,40	-0,133835	12,367535
5	0,00	-0,197000	14,624544
6	0,40	-0,133835	12,332012
7	0,80	0,055662	7,433185
8	1,20	0,371489	3,187720
9	1,60	0,813647	0,812274
10	2,00	1,382137	-0,519514

$w(x)$ peut à présent être considéré comme satisfaisant; une valeur probablement meilleure pour λ_{01} serait

$$1,1967 \times h_0 \pi^2 / b_0^2 \quad (T = 619,13 \text{ sec}).$$

En considérant cette dernière valeur comme la valeur « exacte » obtenue par la méthode appliquée ici, on voit que l'erreur ainsi commise sur λ_{01} est inférieure à 0,3 %, et celle commise sur T_{01} inférieure à 0,14 %. L'amélioration que l'on peut espérer en utilisant des formules de différences finies plus raffinées est donc entièrement négligeable, et l'on se contentera, dans les calculs numériques des chapitres suivants, de la formule employée ici.

Remarquons également, à propos de cet exemple numérique, que l'unité naturelle de longueur s'élimine d'elle-même; il ne subsiste que l'unité arbitraire choisie pour $w(x)$, qui possède les dimensions d'une longueur.

§ 6. NOUVELLE MÉTHODE DE RÉOLUTION DE L'ÉQUATION DE CHRYSTAL ÉTENDUE À DEUX DIMENSIONS.

[Équations (VI.1) à (VI.4).]

Le succès des méthodes exposées dans les paragraphes précédents reposait essentiellement sur la possibilité de séparer les deux variables spatiales x et y (appelées respectivement variable « longitudinale » et variable « transversale » dans les pages qui précèdent), et de ramener ainsi le problème à deux dimensions à un problème à une seule dimension. Afin de rendre cette séparation possible, on avait dû introduire l'hypothèse de la « faible variation » de $b(x)$ et, éventuellement, de $h(x)$ (pp. 175, 181). Il est aisé de montrer que si cette hypothèse cesse d'être valable, la séparation des variables x et y n'est plus possible. On a beau poser

$$\zeta = \frac{\cos}{\sin} \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \cdot w(x) \right.$$

(ou, pour plus de raffinement, ε étant une constante petite devant l'unité,

$$\zeta = \left[\frac{\sin}{\cos} \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \cdot w(x) + \varepsilon \cdot \frac{\cos}{\sin} \left\{ \frac{r \pi y}{b(x)} \cdot z(x) \right. \right],$$

les fonctions $w(x)$ et $z(x)$ étant encore reliées entre elles par la condition-frontière

$$\frac{\partial \zeta}{\partial n} = \frac{\partial \zeta}{\partial x} n_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y} n_y = 0$$

les parois étant supposées verticales), on obtient inévitablement une équation différentielle en w où y réapparaît, ce qui montre que l'hypothèse de la séparabilité des variables contenait une contradiction interne, non apparente à première vue.

Mathématiquement, on le vérifie en développant les calculs à partir des égalités posées quelques lignes plus haut pour ζ .

Physiquement, la chose peut s'interpréter comme suit. Aussi longtemps que la largeur du lac varie « très peu » le long du Talweg, on peut considérer les sections droites $x = \text{const.}$ comme pratiquement orthogonales aux parois latérales du lac, et, par conséquent, admettre que le mouvement d'oscillation transversale se fait par tranches sensiblement parallèles à l'axe Ox . Si de plus h est constant en y (ou rendu tel par une « régularisation » convenable des sections droites perpendiculaires au Talweg), il est légitime de poser ζ proportionnel à $\sin [q\pi y/b(x)]$ ($q = \text{entier impair}$) — ou à $\cos [p\pi y/b(x)]$ ($p = \text{entier pair}$), suivant qu'on s'intéresse aux modes antisymétriques (nœud au centre) ou symétriques (ventre au centre). Mais dès que la largeur du lac cesse d'être « peu variable » le long du Talweg, l'orthogonalité cesse d'exister entre les parois latérales et les surfaces $x = \text{const.}$, et le mouvement, au lieu de se faire par tranches parallèles à Ox , d'épaisseur pratiquement constante en x , et orthogonales aux frontières du lac aux extrémités ($x = \alpha$, $x = \beta$ par exemple), va maintenant avoir lieu par tranches d'épaisseur variable en x et orthogonales au contour incurvé de la région où ont lieu les seiches (cf. fig. 34). Si l'on voulait encore tenter de représenter ζ à l'aide de \sin ou de \cos , le rôle de y serait joué à présent par une coordonnée curviligne orthogonale aux courbes $\zeta = \text{const.}$ Par suite, en coordonnées x, y il n'y a plus en général possibilité de séparer les variables spatiales, et l'on se trouve devant un véritable problème de seiches à deux dimensions.

De là l'idée de résoudre le problème à l'aide de coordonnées curvilignes, ce qui permettrait à nouveau de séparer les deux variables spatiales.

On a obtenu plus haut (pp. 168-170), pour l'équation de continuité :

$$\zeta = - \text{div } \Phi \quad (\text{VI.1})$$

(Φ désignant le secteur surface balayée par une colonne de base infiniment petite $dx dy$ au cours de son déplacement :

$$\Phi = h(x, y) \cdot (\xi, \eta),$$

ξ et η étant les composantes de ce dernier) et pour l'équation du mouvement :

$$\lambda \Phi = h(x, y) \cdot \text{grad } \zeta. \quad (\text{VI.2})$$

Au lieu des coordonnées (x, y) , introduisons des coordonnées curvilignes définies comme suit (cf. fig. 34) :

Une famille de courbes $\psi = \text{const.}$, le long desquelles ζ conserve une même valeur; lorsque le lac est limité par des parois verticales, ces courbes sont orthogonales à ces parois.

Une famille de courbes $\chi = \text{const.}$, orthogonales aux précédentes; les rives du lac, lorsqu'elles sont constituées par des parois verticales, appartiennent par conséquent à cette famille.

Pour des lacs réels, ces deux familles de courbes se tracent au juger; ceci est largement facilité par le fait que la famille $\psi = \text{const.}$ peut être prise ortho-

gonale aux rives du lac : il suffit pour cela de « rogner » les rives en pente très douce, de manière à pouvoir assimiler le nouveau rivage à une paroi verticale (comme on l'a déjà fait précédemment cf. pp. 91, 110). On verra du reste plus

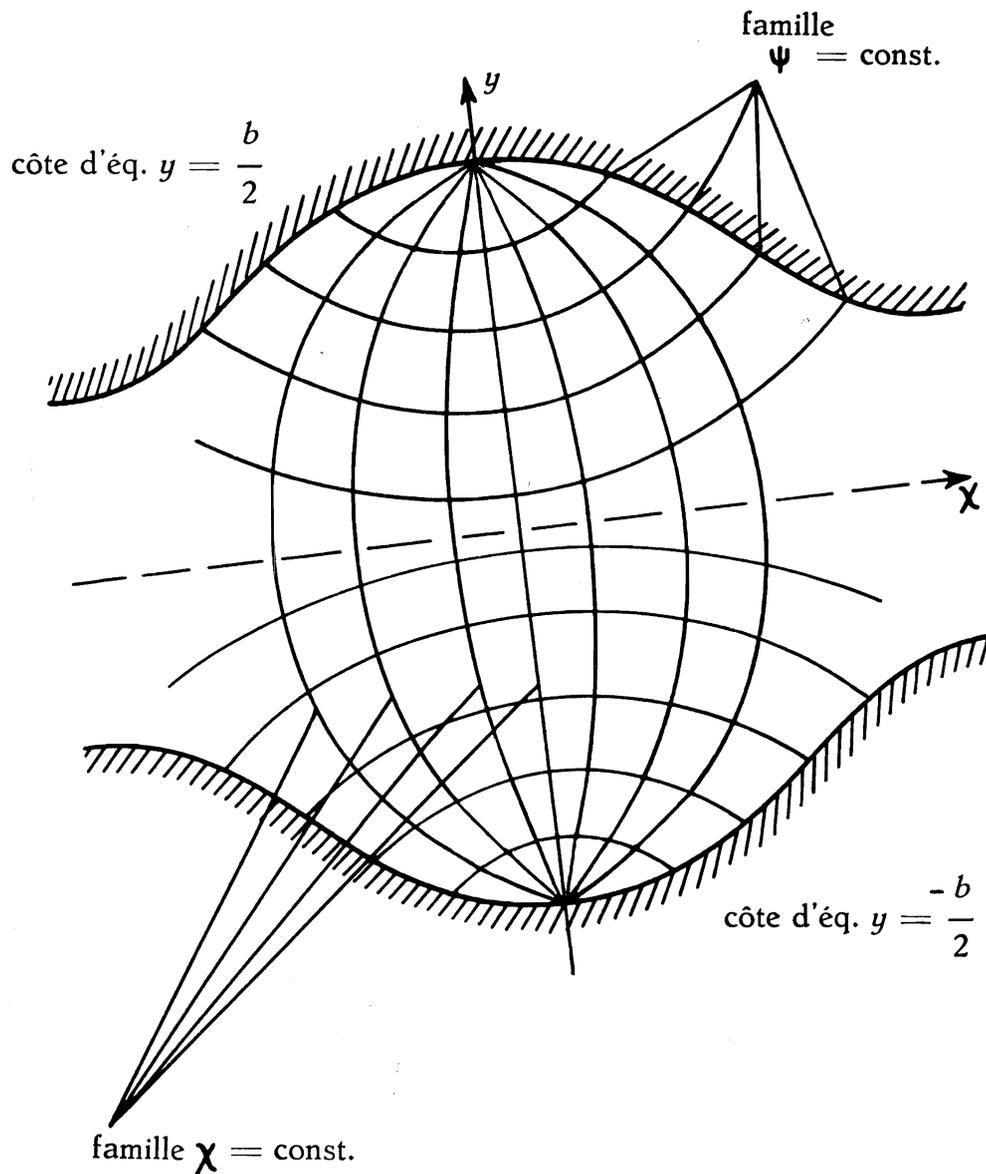


FIG. 34.

loin que de notables inexactitudes dans le tracé de ces courbes n'influencent que faiblement les périodes d'oscillation calculées.

Transformons maintenant l'équation de continuité. On a, en vertu du théorème de la divergence :

$$\int \operatorname{div} \Phi \, d\tau = \oint \Phi \, dS$$

($d\tau$ = élément de volume, dS = élément de surface); par suite (VI.1) devient :

$$-\int \zeta d\tau = \oint \Phi dS. \quad (\text{VI.21})$$

Le second membre de cette égalité désigne la somme des flux sortant d'une suite de colonnes élémentaires, de volumes $h(\psi, \chi) d\psi d\chi$. Mais, comme pour chacune de ces colonnes deux faces seulement (de la famille des $\psi = \text{const.}$) contribuent au bilan du flux, on peut écrire, pour une colonne comprise entre les sections $\psi = \psi_{k-1}$ (= const.) et $\psi = \psi_k$ (= const.) d'une part et $\chi = \chi_{l-1}$ et $\chi = \chi_l$ d'autre part, et qui sera appelée la k^{e} colonne du l^{e} filet :

$$(\text{flux sortant})_{k,l} = -\Phi_{k-1,l} dS_{k-1,l} + \Phi_{k,l} dS_{k,l}, \quad (\text{VI.22})$$

(le flux sortant étant compté négativement, ce qui est contraire à ce qui se fait d'habitude, mais permettra dans le cas présent d'aboutir à des formules en tout point analogues à celles de DEFANT, utilisées dans le calcul des seiches longitudinales). Faisons maintenant successivement $k = 1, 2 \dots j$, et additionnons les égalités obtenues; il vient :

$$\int_0^{\tau_{jl}} \zeta d\tau_{kl} = -\Phi_{jl} dS_{jl}, \quad (\text{VI.23})$$

τ_{jl} désignant le volume des j premières colonnes élémentaires composant le l^{e} filet, et Φ_{jl} étant évidemment nul.

Si l'on fait la somme de toutes les égalités (VI.23) qu'on peut écrire en prenant successivement $l = 1, 2 \dots n$, c'est-à-dire si l'on additionne les colonnes élémentaires comprises entre les surfaces $\psi = \psi_{j-1}$ et $\psi = \psi_j$, le volume élémentaire à considérer sera celui d'une tranche (la j^{e} tranche), et sera appelé $d\tau_j$. A Φ_j , qui, en général, varie tout le long de la tranche (mais d'autant plus faiblement que celle-ci est plus mince), on substituera pour le calcul numérique un Φ moyen, noté $\bar{\Phi}$ et défini par

$$\int_{y=-b/2}^{y=b/2} \Phi_{jl} dS_{jl}(y) = \bar{\Phi}_j S_j,$$

l'intégration étant effectuée d'une rive à l'autre, c'est-à-dire sur toute la largeur b du lac (cf. fig. 34).

A cause de la définition des coordonnées curvilignes adoptées, ζ est constant tout le long d'une même tranche; la sommation des (VI.23) sur toute une tranche donne donc :

$$\int_0^{\tau_j} \zeta d\tau_k = -\bar{\Phi}_j S_j,$$

ou, en procédant par éléments finis :

$$\bar{\Phi}_j = -\frac{1}{S_j} \sum_{k=1}^j \zeta_k \Delta\tau_k. \quad (\text{VI.24})$$

On aboutit à une formule un peu plus simple si l'on remarque que $d\tau = h(\psi, \chi) d\psi d\chi$ et que

$$\Phi = h(\psi, \chi) \cdot (\vec{\xi}, \vec{\eta});$$

une simplification par $h(\psi, \chi)$ conduit alors sans difficulté à la formule

$$\bar{\varphi}_j = -\frac{1}{S_j} \sum_{k=1}^j \zeta_k \Delta v_k, \quad (\text{VI.25})$$

où φ désigne le vecteur $(\vec{\xi}, \vec{\eta})$ ($\bar{\varphi}_j$ étant un φ_j moyen analogue au $\bar{\Phi}_j$ moyen défini ci-dessus), et Δv_k l'élément de surface libre correspondant à chaque tranche curviligne.

On peut naturellement retrouver les mêmes résultats en refaisant en coordonnées curvilignes (ψ, χ) le raisonnement de G. CHRYSTAL sur la conservation du volume d'une tranche liquide dans un déplacement φ . De toute manière, on se trouve ramené en fait à un problème à une seule dimension.

Pour l'équation du mouvement, appliquée à la j° colonne du l° filet, on a immédiatement, par (VI.2) :

$$\lambda \Phi_{jl} = h(\psi, \chi) \cdot \frac{\zeta_j - \zeta_{j-1}}{\Delta \psi_j}, \quad (\text{VI.26})$$

d'où l'on tire, pour calculer ζ_j :

$$\zeta_j = \zeta_{j-1} + \lambda \varphi_{jl} \Delta \psi_j.$$

Comme ζ est constant le long des courbes $\psi = \text{const.}$, cette dernière égalité peut s'écrire, en prenant

$$\Delta \bar{\Phi}_j = \frac{2 \Delta v_j}{\sum_l \Delta \chi_{j-1,l} + \sum_l \Delta \chi_{jl}}$$

comme « largeur » moyenne de la tranche :

$$\zeta_j = \zeta_{j-1} + \lambda \bar{\varphi}_j \Delta \bar{\Phi}_j. \quad (\text{VI.27})$$

Les égalités (VI.24), (VI.25) et (VI.27) vont permettre le calcul des seiches point par point; la valeur de la dénivellation ζ initiale, c'est-à-dire existant dans la « tranche » avoisinant la rive qui sert de point de départ, est choisie arbitrairement.

A la valeur propre λ on attribue une valeur d'essai, et celle-ci pourra être considérée comme satisfaisante lorsque $\sum \zeta_k \Delta v_k$, masse d'eau déplacée dans le mouvement oscillatoire en un quart de période, s'annule sur l'autre rive du lac, comme l'impose évidemment la conservation de la masse d'eau en oscillation.

Exemples d'applications numériques.

a) Soit à calculer la période du mode fondamental (antisymétrique) d'un bassin circulaire de profondeur constante.

Données numériques : rayon = 10 km; profondeur = 100 m.

Le problème est résoluble de manière rigoureuse à l'aide des fonctions de BESSEL ⁽⁹⁹⁾; on trouve pour la valeur propre :

$$\mu_1 \equiv \frac{4 \pi^2}{gh_0 T^2} = \frac{3,389}{a^2},$$

a désignant le rayon du bassin, ce qui nous donne dans le cas présent :

$T_1 \simeq 0,0118746 \times 10^8 \text{ sec.}^2$ ou $T_1 \simeq 1090 \text{ sec.} = 18 \text{ min. } 10 \text{ sec.}$ Pour le calcul approché à l'aide de la méthode qui vient d'être décrite, divisons le bassin en 10 compartiments, dont les lignes de démarcation sont tracées au juger, orthogonalement au contour.

Afin de mieux pouvoir juger de la stabilité de la méthode, les mesures ont été faites sans grande précision, et l'on a fait les calculs deux fois, d'après deux « cartes » différentes, la seconde étant moins exacte encore que la première. Malgré le petit nombre de compartiments utilisés et le peu de précision des mesures, effectuées à la règle sur les cartes en question, la valeur propre μ_1 obtenue à l'aide de la première « carte » est égale à $3,388/a^2$, soit une valeur pratiquement exacte (moins de 0,03 % d'erreur !); la seconde « carte » (moins bonne que la première) permet encore d'arriver à $\mu_1 = 3,25/a^2$, d'où $T_1 \simeq 1113 \text{ sec.}$, valeur qui ne diffère que de 2 % de la valeur exacte.

Voici les deux « cartes » pour un quart de bassin, et la table de mesures relative à chacune d'elles.

Section n°	Carte I			Carte II		
	Δv km ²	S km ²	$\Delta \bar{\psi}$ km	Δv km ²	S km ²	$\Delta \bar{\psi}$ km
1	4,01	0,35	2,29	3,18	0,30	2,120
2	11,74	0,65	2,35	9,56	0,575	2,185
3	17,51	0,85	2,33	15,44	0,77	2,296
4	20,86	0,96	2,30	22,595	0,93	2,658
5	23,45	1,00	2,39	26,724	1,00	2,769
6	23,45	0,96	2,39	26,724	0,93	2,769
7	20,86	0,85	2,30	22,595	0,77	2,658
8	17,51	0,65	2,33	15,44	0,575	2,296
9	11,74	0,35	2,35	9,56	0,30	2,185
10	4,01	0	2,29	3,18	0	2,120

Remarque. — Les Δv et les S ont été mesurés pour un demi-bassin seulement. L'égalité (VI.25) montre que $\bar{\varphi}$ n'en est affecté.

⁽⁹⁹⁾ La solution en est donnée dans LAMB, H., *op. cit.*, § 191, pp. 284 sqq.

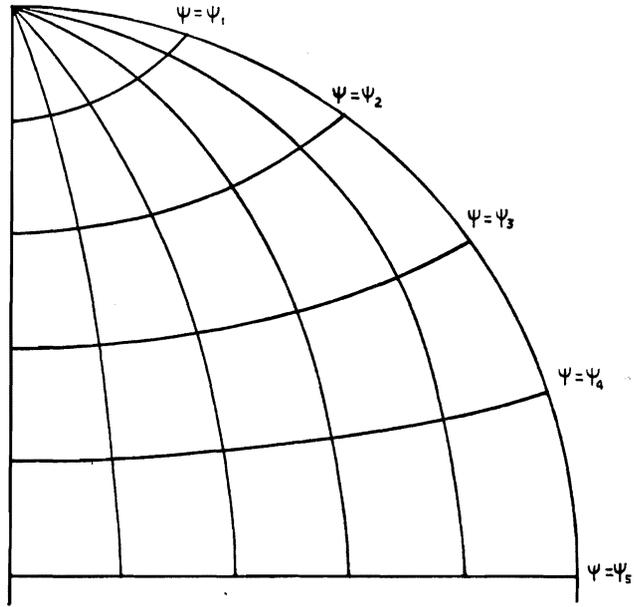


FIG. 35. — Bassin circulaire. Carte I (quart du bassin).

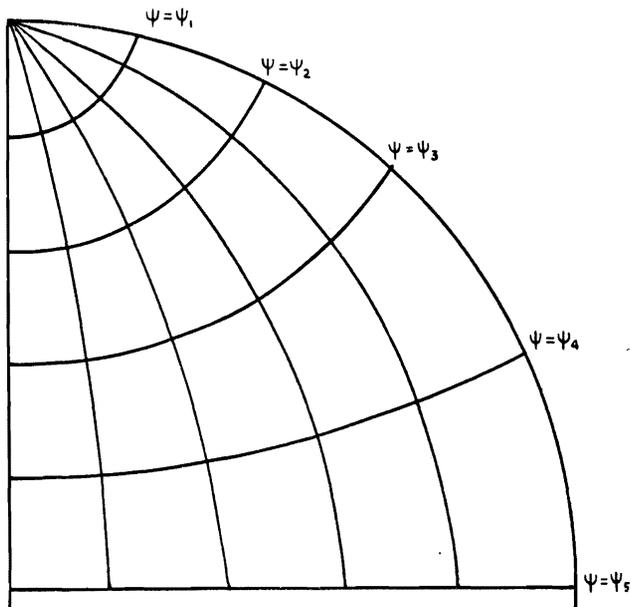


FIG. 36. — Bassin circulaire. Carte II (quart du bassin).

Vérification des mesures : on trouve, pour la carte I, $\frac{1}{2} \Sigma \Delta v_i = 77,50 \text{ km}^2$; la valeur exacte (= 1/4 surface libre du bassin) est $78,54 \text{ km}^2$, de sorte que l'erreur commise excède à peine 1 %; pour la carte II, on a $\frac{1}{2} \Sigma \Delta v_i = 77,499 \text{ km}^2$.

Voici les tableaux des calculs effectués respectivement avec $\mu_1 = 3,389/a^2$ (carte I) et $\mu_1 = 3,25/a^2$ (carte II). Les opérations sont menées exactement comme dans la méthode de DEFANT (seiches longitudinales). La valeur $3,388/a^2$ (carte I), est obtenue par extrapolation linéaire, à l'aide d'un essai précédent effectué avec $\mu_1 = 3,39/a^2$.

Notations : u désigne la masse d'eau déplacée, et est égale à $-\Sigma \zeta_{i-1} \Delta v_i$; $\bar{\Phi} = u.h/S$.

Section n°	ζ cm	u 10^{10} cm^3	$\bar{\Phi}$ 10^7 cm^2	$\Delta \zeta$ cm
Carte I				
1	100,000	401,000	1,1457	- 8,892
2	91,108	1.470,608	2,2625	-18,019
3	73,089	2.750,396	3,2358	-25,551
4	47,538	3.742,039	3,8980	-30,384
5	17,154	4.144,300	4,1443	-33,568
6	- 16,414	3.759,392	3,9160	-31,718
7	- 48,132	2.755,358	3,2416	-25,267
8	- 73,399	1.470,142	2,2618	-17,860
9	- 91,259	398,761	1,1393	- 9,074
10	-100,333	- 3,574	—	—
Carte II				
1	100,000	318,000	1,0600	- 7,303
2	92,697	1.204,276	2,0944	-14,873
3	77,824	2.405,879	3,1245	-23,315
4	54,508	3.637,510	3,9113	-33,788
5	20,721	4.191,258	4,1913	-37,719
6	- 16,998	3.737,003	4,0183	-36,162
7	- 53,160	2.535,853	3,2933	-28,449
8	- 81,609	1.275,810	2,2188	-16,557
9	- 98,166	337,245	1,1242	- 7,983
10	-106,149	- 0,309	—	—

Le graphique ci-après montre l'allure des solutions construites point par point par la méthode qui vient d'être utilisée. Les niveaux ζ les plus bas en valeur absolue sont ceux trouvés en utilisant la carte I; les plus élevés en valeur absolue correspondent à l'emploi de la carte II. La courbe continue représente

la solution exacte, la fonction de BESSEL $J_1(\psi)$, le milieu du bassin étant pris comme origine, et la distance ψ , mesurée le long du diamètre perpendiculaire au diamètre nodal, comme argument.

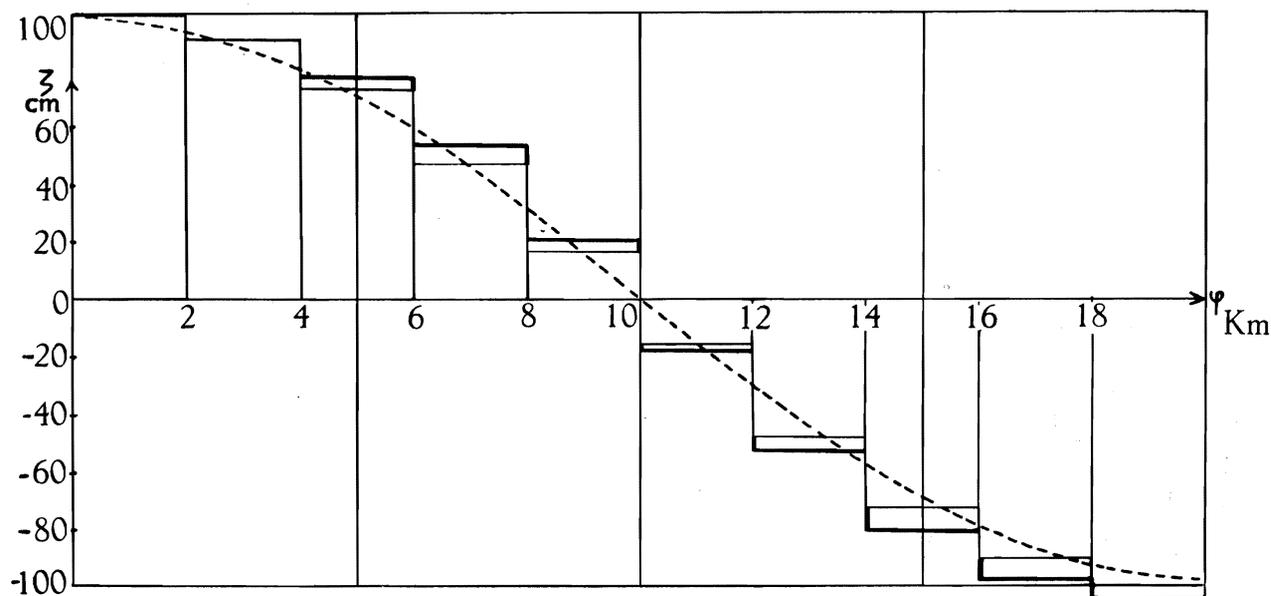


FIG. 37. — Bassin circulaire de profondeur constante.

Distribution des amplitudes de l'oscillation libre fondamentale le long du diamètre de dénivellation maxima.

b) Soit ensuite à calculer le mode fondamental d'un bassin circulaire, de profondeur variable, donnée en coordonnées polaires par $h(r) = h_0(1 - r^2/a^2)$. Le problème des oscillations libres d'un tel bassin admet des solutions exactes de forme hypergéométrique; l'emploi des coordonnées polaires (r, θ) permet la séparation des variables, et l'on trouve, pour le fondamental, qui seul nous intéresse ici: $\zeta = (r/a) \sin \theta$ (à un facteur constant près, et le facteur périodique $e^{i\omega t}$ étant sous-entendu). La valeur propre correspondante est $\mu_1 = 2/a^2$ ⁽¹⁰⁰⁾.

La surface libre de l'eau en oscillation suivant ce mode est donc plane, exactement comme dans le cas du fondamental du lac parabolique de largeur constante.

Il s'ensuit que les lignes où ζ est constant sont des droites parallèles au diamètre nodal, droites qui ne sont évidemment pas orthogonales au rivage du lac ni aux courbes isobathes (cercles concentriques au rivage).

(100) Cf. LAMB, H., *op. cit.*, § 193, pp. 291 sqq.

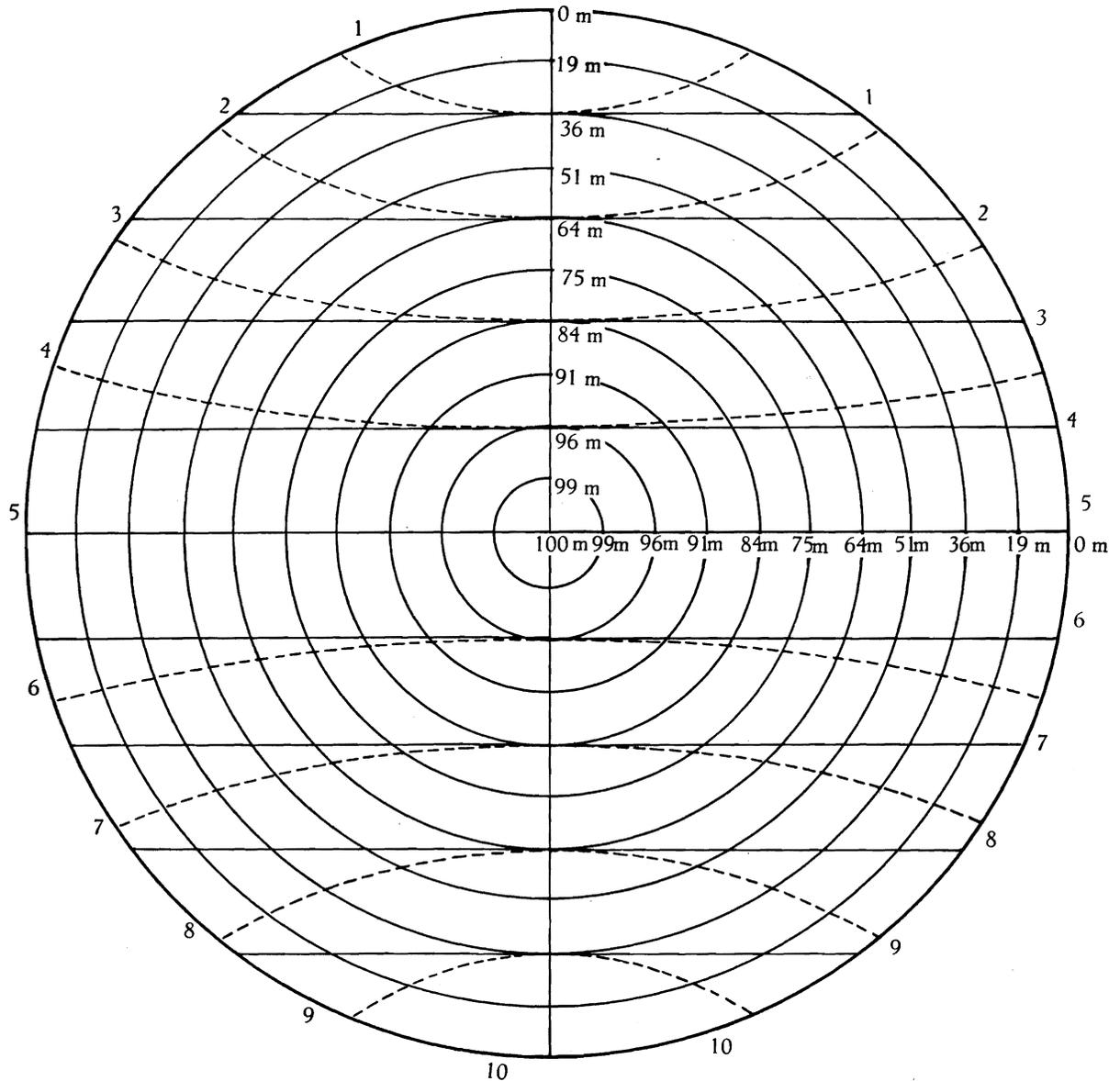


FIG. 38. — Bassin circulaire, de profondeur $h(r) = h_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right)$.
 $h_0 = 100$ m, $a = 10$ km. Échelle $1/100.000^e$
 (pour les courbes en trait ininterrompu, cf. p. 200)

La carte ci-dessus représente le bassin en question, à l'échelle de $1/100.000^e$; on a pris comme données numériques : rayon $a = 10$ km; $h_0 = 100$ m.

Les isobathes sont tracées de km en km, et les profondeurs correspondantes sont indiquées à proximité.

En vue du calcul numérique, le bassin a été divisé en dix compartiments, séparés par des droites parallèles équidistantes (2 km d'intervalle).

Mesures bathymétriques.

Section n°	Δv km ²	S km ²	Section n°	Δv km ²	S km ²
1	16,50	0,2832	6	39,60	1,2544
2	27,90	0,6827	7	38,00	1,0304
3	34,40	1,0304	8	34,40	0,6827
4	38,00	1,2544	9	27,90	0,2832
5	39,60	1,3333	10	16,50	0

Vérifications : $\Sigma \Delta v_i = 312,80$ km² (au lieu de la valeur exacte 314,16 km², soit une erreur inférieure à 0,44 %).

Les S sont calculés à l'aide de la formule donnant l'aire d'un segment parabolique comme égale aux 2/3 de l'aire du rectangle de même base et de même hauteur.

Voici le tableau des calculs effectués avec la valeur d'essai $\mu_1 = 1,986 \times 10^{-12}$ cm⁻² (valeur exacte : $\mu_1 = 2 \times 10^{-12}$ cm⁻², c'est-à-dire $T_1 = 1.418,5$ sec. = 23 min. 38,5 sec.).

Section n°	ζ cm	u 10 ¹⁰ cm ³	φ 10 ² cm	$\Delta \zeta$ cm
1	100,000	1.650,000	58,262	-23,142
2	76,858	3.794,338	55,578	-22,076
3	54,782	5.678,839	55,113	-21,891
4	32,891	6.928,697	55,235	-21,939
5	10,952	7.362,962	55,219	-21,933
6	-10,981	6.928,114	55,230	-21,937
7	-32,918	5.677,230	55,097	-21,885
8	-54,803	3.792,007	55,544	-22,062
9	-76,865	1.647,474	58,174	-23,107
10	-99,972	- 2,064	—	—

Un essai semblable, effectué avec $\mu_1 = 1,99 \times 10^{-12}$ cm⁻², avait laissé un « résidu » de $u_{10} = -21,378 \times 10^{10}$ cm³; $\mu_1 = 1,98 \times 10^{-12}$ cm⁻² conduit à $u_{10} = 26,965 \times 10^{10}$ cm³. La précision atteinte est donc largement satisfaisante : l'écart entre la valeur trouvée et la valeur exacte de μ_1 est de -0,7 % seulement. Quant à l'erreur sur la période ($T_1 = 1.423,5$ sec. au lieu de 1.418,5 sec.), elle n'atteint que 0,35 %.

Il faut remarquer cependant que le calcul ci-dessus a été effectué avec une division en compartiments conforme à la solution exacte, connue à l'avance, à savoir une solution où le profil de la surface libre reste plan.

Ce profil plan est retrouvé de manière très satisfaisante dans la table ci-dessus ($\Delta \zeta$ est à peu près constant).

Voyons à présent ce qui se passerait si l'on ignorait la forme du profil de l'eau en oscillation. Dans ce cas, il serait assez naturel d'entreprendre le calcul avec des compartiments séparés par des sections approximativement orthogonales au rivage du lac, par exemple celles tracées en trait interrompu sur la carte donnée plus haut. Le profil ainsi obtenu ne sera plus plan, mais il est intéressant de voir si la période obtenue de cette manière s'écarte notablement de la valeur exacte.

Mesures bathymétriques.

Section n°	Δv km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km	Section n°	Δv km ²	S km ²	$\Delta\bar{\psi}$ km
1	11,50	0,2064	2,30	6	48,40	1,2416	2,46
2	23,30	0,5888	2,08	7	38,80	0,9744	2,10
3	34,80	0,9744	2,23	8	34,80	0,5888	2,23
4	38,80	1,2416	2,10	9	23,30	0,2064	2,08
5	48,40	1,3333	2,46	10	11,50	0	2,30

Vérification : $\sum \Delta v_i = 313,60$ km² (au lieu de la valeur exacte 314,16 km², soit moins de 0,18 % d'erreur).

$\Delta\bar{\psi}$, distance moyenne entre deux courbes $\psi = \text{constante}$, a été pris variable et calculé à l'aide des Δv , au lieu d'être pris constant, comme ç'aurait été le cas si on l'avait mesuré le long du « Talweg » (ici, le diamètre perpendiculaire au diamètre nodal). Voici la table des résultats que l'on trouve en prenant $\mu_1 = 1,95 \times 10^{-12}$ cm⁻² ($T_1 = 1.436,6$ sec.).

Section n°	ζ cm	u 10 ¹⁰ cm ³	$\bar{\phi}$ 10 ² cm	$\Delta\zeta$ cm
1	100,000	1.150,000	55,717	-24,989
2	75,011	2.897,756	49,214	-19,961
3	55,050	4.813,496	49,400	-21,482
4	33,568	6.115,934	49,258	-20,171
5	13,397	6.764,349	50,734	-24,337
6	-10,940	6.234,853	50,216	-24,089
7	-35,029	4.875,728	50,038	-20,491
8	-55,520	2.943,667	49,994	-21,740
9	-77,260	1.143,509	55,403	-22,471
10	-99,731	- 3,397	—	—

L'inspection de ζ et des $\Delta\zeta$ montre que le profil n'est pas plan, et que la symétrie autour du diamètre nodal n'est qu'approximative; néanmoins, la valeur de μ_1 est bonne (2,5 % d'erreur seulement), alors que les compartiments

utilisés diffèrent notablement des compartiments « exacts »; l'erreur sur la période fondamentale n'est que de 1,3 % environ.

La stabilité de la méthode s'avère ainsi remarquable, puisque de grossières inexactitudes dans le tracé des sections (lignes d'égale dénivellation ζ) n'ont qu'une influence très faible sur la période obtenue, et ceci malgré le petit nombre de divisions utilisées.

CHAPITRE II.

LES SEICHES TRANSVERSALES DU LAC DE GENÈVE.

Comme pour l'étude des seiches longitudinales, le lac de Genève servira cette fois-ci encore de lac-témoin; les présents calculs ont surtout pour but de montrer le degré de précision avec lequel les méthodes décrites dans le chapitre précédent permettent de retrouver les résultats expérimentaux, établis par les observations, en même temps que d'éprouver la valeur pratique des différentes méthodes.

§ 1. RÉSULTATS DES OBSERVATIONS.

Les seiches transversales s'observent principalement dans deux régions du Grand-Lac : la partie sud-ouest de celui-ci, qui sera désignée pour la facilité sous le nom de « région Rolle-Thonon », et la partie centrale, appelée désormais « région Morges-Évian ».

Les seiches de la première région ont été observées depuis très longtemps; déjà F. A. FOREL ⁽¹⁰¹⁾, en 1891, considère leur existence comme bien établie et leur attribue une période d'environ sept minutes. Ceci est pleinement confirmé par des observations modernes : des enregistrements limnographiques, effectués en juillet-août 1950 et que le Service Fédéral des Eaux à Berne a bien voulu nous communiquer, montrent clairement l'existence d'une seiche transversale, de période voisine de sept minutes, dans toute la région depuis Saint-Sulpice jusqu'à Rolle; les observations manquent cependant, d'une part entre la ligne Cully-Meillerie et Saint-Sulpice, et d'autre part entre la ligne Coppet-Hermance et Rolle. Les dénivellations paraissant en phase à Saint-Prex et à Thonon, il y a lieu de croire qu'il s'agit d'une uninodale transversale possédant au moins un nœud longitudinal.

Quant aux seiches du renflement Morges-Évian, leur existence était elle aussi déjà bien connue de F. A. FOREL ⁽¹⁰²⁾ qui leur attribuait une période

⁽¹⁰¹⁾ FOREL, F. A., *Le Léman*, II, p. 107.

⁽¹⁰²⁾ ID., *ibid.*