

c) Orthogonalité.

Comme pour les modes normaux longitudinaux calculés dans la première partie, on devra avoir ici, pour des fonctions normées :

$$\int_0^a \frac{u_i u_j}{\sigma(v)} dv = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j), \end{cases}$$

ou, plus simplement (en désignant ici par l la largeur « moyenne » de la portion de lac considérée) :

$$\int_0^l u_i \bar{\varphi}_j d\bar{\psi} = \begin{cases} 0 & (i \neq j), \\ 1 & (i = j). \end{cases}$$

Vérifions si ces relations ont lieu pour les deux modes calculés. On a calculé séparément, à titre de contrôle, $u_1 \bar{\varphi}_2$ et $u_2 \bar{\varphi}_1$; les intervalles étant pratiquement égaux (à l'exception du premier, traité séparément, comme un triangle), on peut appliquer la règle de SIMPSON.

Il vient ainsi :

$$\begin{aligned} \int_0^l u_1 \bar{\varphi}_1 d\bar{\psi} &= 11.106,2208 \times 10^{11} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_2 \bar{\varphi}_2 d\bar{\psi} &= 931,5842 \times 10^{11} \text{ m}^5; \\ \int_0^l u_1 \bar{\varphi}_2 d\bar{\psi} &= -94,2080 \times 10^{11} \text{ m}^5 = \int_0^l u_2 \bar{\varphi}_1 d\bar{\psi}. \end{aligned}$$

Le quotient du dernier nombre par la norme, produit des racines carrées des deux premiers nombres, égale $-0,0293$, résultat qui permet de conclure à une orthogonalité satisfaisante.

CHAPITRE IV.

**« SHELF-SEICHES », « EDGE-WAVES » DE STOKES,
« BANK-SEICHES » ET SEICHES DANS LES DÉTROITS.**

Les quatre « types » d'oscillations étudiés dans ce dernier chapitre ne présentent entre eux qu'une parenté assez lointaine, et c'est plutôt pour la commodité qu'on les a réunis ici.

Ainsi, tandis que les « shelf-seiches », « bank-seiches » et seiches de détroits sont des ondes du type marée, les « edges-waves » de STOKES au contraire appartiennent au type des ondes de surface (cf. p. 17). Les « bank-seiches »,

du moins sous la forme où elles furent envisagées par K. HIDAHA (¹⁰⁶), sont des oscillations à une seule dimension horizontale (dans le paragraphe ci-après qui leur est consacré on s'efforcera de traiter ce problème à deux dimensions, au moins dans un cas particulier), alors que les trois autres types d'oscillations sont à deux dimensions horizontales. Les seiches de détroit ont lieu, comme leur nom l'indique, dans une portion de mer limitée par deux côtes opposées et ouverte par ailleurs; les « edge-waves » de STOKES et les « shelf-seiches » se produisent dans une mer limitée par une seule côte (problème à une dimension horizontale) ou dans un golfe sensiblement rectangulaire (problème à deux dimensions horizontales); enfin, les « bank-seiches » se produisent en haute mer, c'est-à-dire dans une masse d'eau que ne limite aucune côte.

Les résultats de la théorie des « shelf-seiches » et des « edge-waves » de STOKES feront l'objet d'une application numérique au lac Tanganika (cf. § 3).

§ 1. LES « SHELF-SEICHES ».

La question fut soulevée par K. HIDAHA (¹⁰⁷) de savoir quels types d'oscillation libre peuvent apparaître sur une côte en pente douce, limitant un océan infini (problème à une dimension horizontale). L'auteur l'envisage à titre de cas particulier d'un autre problème, à savoir si des « seiches » sont possibles en pleine mer, loin de toute côte, au-dessus d'un haut-fond (article de la note 106); il traite le cas d'un haut-fond hyperbolique, pour lequel il trouve des solutions apparentées aux fonctions de MATHIEU : une classe de solutions paires (ou symétriques par rapport au sommet du haut-fond) et une autre de solutions impaires (ou antisymétriques par rapport à ce sommet) (cf. § 4); les premières continuent à être recevables si un petit mur vertical, jouant le rôle d'une côte, se trouve au sommet du haut-fond. Cette théorie, ainsi que le problème initial dont elle se déduit, seront traités au § 4 ci-après. En attendant, faisons la théorie du cas le plus simple possible : une côte plane inclinée bornant un océan infini (problème à une dimension horizontale), ou bornant un canal de largeur constante (problème à deux dimensions horizontales). Pour plus de généralité, considérons directement le cas à deux dimensions; on en déduira facilement (p. 272) la théorie du cas à une seule dimension.

A. — Soit donc un lac-canal de largeur constante, égale à b_0 , de profondeur constante dans le sens de la largeur (axe Oy) et variable dans le sens de la longueur (axe Ox) : $h(x, y) = h(x) = \beta x$, quantité mesurée positivement vers le bas ($\beta > 0$, grandeur sans dimensions physiques). Le lac s'étend à l'infini vers les x croissants et ses deux rives parallèles sont constituées par des murs verticaux situés en $y = b_0/2$ et $y = -b_0/2$ (cf. fig. 68).

(¹⁰⁶) HIDAHA, K., *Seiches due to a Submarine Bank* (« Bank-Seiches »), Mem. Imp. Mar. Obs., Kobe, VI, 1 (1935), pp. 1-8.

(¹⁰⁷) HIDAHA, K., *A Theory of Shelf-Seiches*, Mem. Imp. Mar. Obs., Kobe, VI, 1 (1935), pp. 9-12.

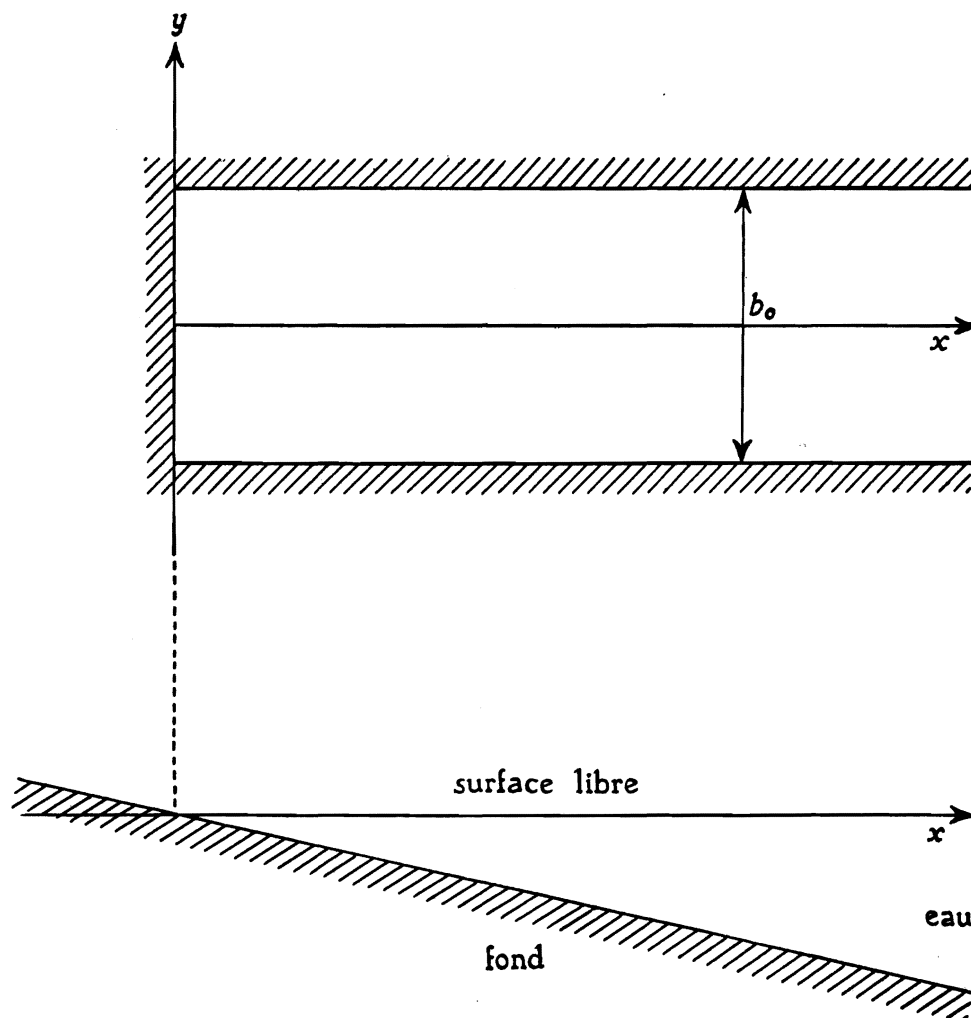


FIG. 68.

L'équation du mouvement (à deux dimensions) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + h(x) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\omega^2}{g} \zeta = 0, \quad (\text{IX.1})$$

et les conditions-frontière sont :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{y=\pm b_0/2} = 0; \quad \zeta = -\beta \xi \text{ (en } x=0); \quad \zeta(\infty) = 0. \quad (\text{IX.2-4})$$

Posons, afin de satisfaire à la condition-frontière (IX.2) :

$$\zeta = \cos \frac{p\pi y}{b_0} \cdot w(x),$$

où p est un nombre entier pair, égal au nombre de nœuds transversaux; pour les seiches d'ordre impair, il suffira de prendre

$$\zeta = \sin \frac{q\pi y}{b_0} \cdot w(x),$$

q étant un entier impair.

L'équation (IX.1) devient alors, après simplification par le facteur :

$$\cos \frac{p\pi y}{b_0} \quad \text{ou} \quad \sin \frac{q\pi y}{b_0} :$$

$$w'' + \frac{1}{x} w' + \left(\frac{\lambda'}{x} - k^2 \right) w = 0, \quad (\text{IX.1}')$$

où l'on a posé

$$\omega^2/g\beta = \lambda'; \quad \left(\frac{r\pi}{b_0} \right)^2 = k^2$$

(r désignant le nombre de nœuds transversaux, c'est-à-dire p ou q).

Changeons de variable en posant $kx = x'$. Il vient :

$$w'' + \frac{1}{x'} w' + \left(\frac{\mu}{x'} - 1 \right) w = 0, \quad (\text{IX.1}'')$$

où $\mu = \lambda'/k$, et où les dérivées sont prises par rapport à x' .

La seconde condition-frontière (IX.3) peut se transformer comme suit : l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\xi} = -g \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

c'est-à-dire, puisque le mouvement est harmonique ($\xi \sim e^{i\omega t}$) :

$$\omega^2 \xi = g \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Éliminant ξ entre cette dernière équation et (IX.3), il vient :

$$\zeta = -\frac{g\beta}{\omega^2} \cdot \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{1}{\lambda'} \frac{\partial \zeta}{\partial x},$$

ou, en simplifiant par

$$\cos \frac{p\pi y}{b_0} \quad \text{ou} \quad \sin \frac{q\pi y}{b_0}$$

et en faisant apparaître la variable x' :

$$\mu w(0) + w'(0) = 0. \quad (\text{IX.3}')$$

Cette égalité se déduit du reste aisément de (IX.1'') : quand $x' \rightarrow 0$, les termes

$$\frac{1}{x'} w' + \frac{\mu}{x'} w$$

deviennent prépondérants (puisque ni w ni w'' ne sont infinis pour $x \rightarrow 0$); leur somme doit donc s'annuler quand $x' \rightarrow 0$, ce qui est précisément ce qu'exprime (IX.3').

Quant à la troisième condition-frontière (IX.4), l'équation (IX.1'') montre que la réalisation en est assurée puisque, pour $x' \rightarrow \infty$ (le champ de la variable x' étant le même que celui de la variable x), (IX.1'') devient $w'' - w = 0$, équation qui admet pour solution : $w = A e^{\pm x'}$ ($A =$ facteur constant quelconque); il suffit donc de prendre le signe négatif.

Essayons de résoudre (IX.1'') en posant

$$w(x') = e^{-x'} v(x'). \quad (\text{IX.5})$$

(IX.1'') prend ainsi la forme :

$$v'' + \left(\frac{1}{x'} - 2\right) v' + \frac{\mu - 1}{x'} v = 0. \quad (\text{IX.6})$$

En prenant une série potentielle en x' pour $v(x')$:

$$v(x') = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x'^{j+\alpha};$$

on trouve immédiatement que $\alpha = 0$; (IX.6) admet donc comme solution une série potentielle entière

$$v(x') = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x'^j,$$

et une solution logarithmique, irrecevable physiquement.

Calculons les coefficients de la première solution; on obtient la suite de relations récurrentes :

$$(j+1)^2 a_{j+1} + [\mu - (2j+1)] a_j = 0, \quad (j = 0, 1, 2 \dots) \quad (\text{IX.7})$$

dont la première $a_1 + (\mu - 1) a_0 = 0$ n'est autre que la condition-frontière (IX.3') transformée à l'aide de (IX.5), c'est-à-dire

$$v'(0) + (\mu - 1) v(0) = 0 \quad (\text{IX.5'})$$

Nous disposons dès lors du paramètre μ pour fixer le degré du polynôme

$$\sum_{j=0}^{\infty} a_j x'^j;$$

en effet, il suffit de prendre $\mu = 2j + 1$, pour que tous les coefficients depuis a_{j+1} s'annulent, ainsi qu'il ressort des relations (IX.7). L'indice j est ainsi égal au degré du polynôme en x' que multiplie l'exponentielle, c'est-à-dire au nombre de nœuds longitudinaux de la seiche.

Faisons successivement :

$$j = 0, \quad \mu = 1 : \quad a_1 = 0, \quad a_0 \text{ constante quelconque (réelle),}$$

$$w(x') = a_0 e^{-x'} : \quad \text{pas de nœuds longitudinaux.}$$

$$j = 1, \quad \mu = 3 : \quad a_2 = 0, \quad a_1 = -2a_0,$$

$$w(x') = a_0 e^{-x'} (1 - 2x') : \quad \text{un nœud longitudinal, en } x' = 1/2.$$

$$j = 2, \quad \mu = 5 : \quad a_3 = 0, \quad a_2 = 2a_0, \quad a_1 = -4a_0,$$

$$w(x') = a_0 e^{-x'} (1 - 4x' + 2x'^2) : \quad \text{deux nœuds, en } x' = 1 + \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad x' = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

etc.

Orthogonalité des fonctions propres $w(x')$.

Convenons de les affecter d'un indice égal au nombre de nœuds longitudinaux; on vérifie alors facilement que pour $j \neq j'$,

$$\int_0^\infty w_j w_{j'} dx' = 0.$$

Si l'on veut en outre les normer, on devra prendre $a_0 = \sqrt{2}$.

On peut encore aboutir à la solution de (IX.1'') en raisonnant comme suit :

L'équation (IX.1'') montre qu'une solution asymptotique est $\sim e^{-x'}$ ($x' \rightarrow \infty$). Écrivons donc que pour $x' \rightarrow \infty$, $v(x') = x'^\gamma (1 + c_1 x'^{-1} + c_2 x'^{-2} + \dots)$ et déterminons γ de manière à satisfaire à (IX.6).

Il vient ainsi, en n'écrivant que les termes en $x'^{\gamma-2}$ et en $x'^{\gamma-1}$:

$$\gamma(\gamma - 1)x'^{\gamma-2} + \gamma x'^{\gamma-2} - 2\gamma x'^{\gamma-1} + (\mu - 1)x'^{\gamma-1} = 0.$$

Si x' devient très grand, les deux premiers termes deviennent négligeables devant les deux derniers, et il reste :

$$(\mu - 1) - 2\gamma = 0.$$

Pour $x' \rightarrow 0$, $v(x')$ se comporte comme $x'^\theta (1 + b_1 x' + b_2 x'^2 + \dots)$; déterminons θ à l'aide de (IX.6) : il vient de même que ci-dessus :

$$\theta(\theta - 1)x'^{\theta-2} + \theta x'^{\theta-2} - 2\theta x'^{\theta-1} + (\mu - 1)x'^{\theta-1} = 0.$$

Cette fois, ce sont les deux premiers termes qui sont prépondérants, ce qui exige $\theta = 0$.

Écrivons enfin que les deux développements sont en réalité identiques, c'est-à-dire identifions la plus haute puissance du premier avec la plus haute puissance du second; on trouve ainsi :

$$\gamma = \frac{\mu - 1}{2} = j, \quad \text{c'est-à-dire} \quad \mu = 2j + 1,$$

($b_j x'^j$ étant le dernier terme du polynôme ordonné par puissances croissantes de x' : $1 + b_1 x' + b_2 x'^2 + \dots + b_j x'^j$).

Il suffit maintenant de faire $j = 0, 1, 2, \dots$ pour pouvoir calculer les coefficients du polynôme, comme il a été fait ci-dessus.

Comparaison avec un lac de profondeur constante.

Considérons un lac-canal, de largeur égale à b_0 , de longueur indéfinie, et voyons pour quelles profondeurs ses oscillations (qu'on peut continuer à appeler latérales, bien que le problème soit à une seule dimension) auront la même période que celles (latérales, mais modulées longitudinalement en amplitude) du lac de profondeur variable qui vient d'être étudié.

On a, pour le canal de profondeur constante, la formule dite de MERIAN :

$$T_r = \frac{2l}{r \sqrt{gh_0}}, \quad \text{dont on tire} \quad \lambda_r = \left(\frac{r \pi}{l} \right)^2 h_0, \quad (\text{IX.8})$$

($r =$ nombre de nœuds, $l =$ longueur du bassin).

Il est essentiel de noter que cette formule n'est applicable que si la profondeur h_0 reste très petite devant l/r .

Pour le lac-canal de profondeur variable (fond plan incliné) on a trouvé

$$\lambda_{rj} \equiv \mu k = (2j + 1) \cdot \frac{r \pi}{b_0},$$

($r =$ nombre de nœuds transversaux, $j =$ nombre de nœuds longitudinaux).

Égalons ces deux valeurs propres, en remarquant que le rôle de l est joué par b_0 et que h_0 est l'inconnue à déterminer; il vient

$$\frac{r^2 \pi^2}{b_0^2} h_0 = (2j + 1) \cdot \frac{r \pi}{b_0},$$

ou

$$h_0 = \frac{2j + 1}{r \pi} b_0. \quad (\text{IX.9})$$

En vertu de la remarque ci-dessus ($h_0 \ll b_0/r$ nécessaire pour que la formule (IX.8) soit applicable), on voit que pour $j = 1$ déjà la formule (IX.9) devient inacceptable, car elle donne $h_0 \simeq b_0/r$.

C'est seulement pour le fondamental transversal (sans nœuds longitudinaux pour le lac de profondeur variable : $j = 0$) que le résultat est quelque peu satisfaisant :

$$h_0 = \frac{b_0}{\pi} \quad (r = 1).$$

Unité naturelle de longueur.

Avec la variable

$$x' = kx = \frac{r \pi}{b_0} x$$

on aura

$$x' = 1, 2, \dots \text{ pour } x = b_0/r\pi, 2b_0/r\pi, \dots$$

L'unité naturelle de longueur est ainsi $b_0/r\pi$; c'est-à-dire la demi-longueur d'onde de la seiche transversale ($r =$ nombre de nœuds transversaux !), divisée par π .

B. — Considérons ensuite le problème à une seule dimension horizontale : au lieu d'un lac-canal, nous aurons maintenant un océan infini à une seule côte, à fond plan incliné.

L'équation (IX.1) se réduit à :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[h(x) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \frac{\omega^2}{g} \zeta = 0, \quad (\text{IX.10})$$

avec les conditions-frontière (IX.3-4), la condition (IX.2) disparaissant. Puisque $h(x) = \beta(x)$, l'équation (IX.10) devient, après simplifications :

$$w'' + \frac{1}{x} w' + \frac{\lambda'}{x} w = 0, \quad (\text{IX.10}')$$

où l'on a posé $\omega^2/g\beta = \lambda'$.

La condition-frontière (IX.3) se transforme comme précédemment et devient :

$$\lambda' w(0) + w'(0) = 0, \quad (\text{IX.3}'')$$

tandis que la condition (IX.4) est réalisée automatiquement. L'équation (IX.10') est identique à l'équation (I.15) (cf. p. 38) et admet comme solution

$$w(x) = J_0(2\sqrt{\lambda'x}).$$

La relation (IX.3) se réduit à :

$$\lambda' J_0(x) + \sqrt{\lambda'x} \cdot J_0'(x) = 0$$

où l'on fait $x=0$, c'est-à-dire à :

$$\sqrt{\lambda'} \cdot J_0'(0) = 0,$$

c'est-à-dire à une identité. Toutes les périodes d'oscillation sont donc possibles; le nombre de nœuds est toujours infini (puisque la fonction J_0 possède une infinité de zéros) : ils sont donnés par

$$J_0(2\sqrt{\lambda'x}) = 0,$$

c'est-à-dire que leurs abscisses sont proportionnelles aux carrés des périodes ⁽¹⁰⁸⁾.

Avant d'appliquer ces résultats à l'un des lacs étudiés dans ce travail, nous donnerons un aperçu de la théorie des « edge-waves » de STOKES, qui conduit

(108) Cf. LAMB, H., *op. cit.*, p. 276.

pour le cas traité ci-dessus à des résultats numériques très voisins de ceux fournis par la théorie des « shelf-seiches ».

C'est ce qui sera illustré par les calculs effectués au § 3.

§ 2. LES « EDGE-WAVES » DE G. STOKES.

Le problème ne diffère de celui des « shelf-seiches » de K. HIRAKA (cf. § 1) que sur un point; au lieu de négliger l'accélération verticale des particules du liquide, on la fait intervenir dans les calculs, c'est-à-dire qu'au lieu d'un problème d'ondes de marée, nous avons maintenant un problème d'ondes de surface (cf. pp. 17 sqq.). G. STOKES ⁽¹⁰⁹⁾ considère :

A. — Un océan s'étendant à l'infini en longueur et en largeur, bordé par une seule côte, et dont le fond est un plan incliné.

Choix des axes : Oy coïncide avec la côte, Ox lui est perpendiculaire et est situé dans le plan de la surface libre de l'eau, Oz est perpendiculaire à Ox et à Oy (donc vertical), et orienté positivement vers le haut (cf. fig. 69).

Le fond plan fait avec l'horizontale un angle β ; il a donc pour équation $h(x) = x \operatorname{tg} \beta$.

Convenons d'appeler « longueur » la dimension parallèle à Ox et « largeur » celle parallèle à la côte. Il est à remarquer que le choix des axes adopté ici diffère de celui de G. STOKES et H. LAMB ⁽¹¹⁰⁾ par la substitution de x à y et vice versa; ceci a pour but de maintenir les notations adoptées dans les chapitres précédents, où l'axe Ox est invariablement « longitudinal » et Oy « transversal ».

L'océan étant infini en largeur, des oscillations de longueur d'onde quelconque pourront se produire dans le sens de l'axe Oy , puisqu'il n'y a pas de condition-frontière en y qui assigne des valeurs particulières à ces longueurs d'onde; par suite de la faible profondeur au voisinage de la côte, l'amplitude de ces oscillations y sera plus forte qu'à quelque distance en mer.

La solution trouvée par STOKES pour le potentiel des vitesses est :

$$\varphi = H \cdot e^{-k(x \cos \beta - z \sin \beta)} \cdot \cos k(y - ct), \quad (\text{IX.11})$$

où H est une constante de dimensions L^2T^{-1} .

$k = 2\pi/\Lambda$, Λ = longueur d'onde de la vague.

c = vitesse de propagation (latérale) de la vague, $= \omega/k = \Lambda/T$, ($\omega = 2\pi/T$ comme d'habitude).

⁽¹⁰⁹⁾ STOKES, G., *Report on Recent Researches on Hydrodynamics*, Brit. Assoc. Reports, 1846 (= Papers, I, p. 167).

⁽¹¹⁰⁾ LAMB, H., *op. cit.*, § 260, pp. 447-448.

On remarque que l'expression $x \cos \beta - z \sin \beta$ n'est autre que la projection, sur le fond, de la distance à l'origine d'un point de la surface en oscillation (x, z) (cf. fig. 69).

Le problème étant posé en ondes de surface, on a ⁽¹¹¹⁾

$$\zeta = \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=\zeta} \simeq \frac{1}{g} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t} \right)_{z=0}$$

(la dénivellation ζ étant très faible par rapport à la profondeur).

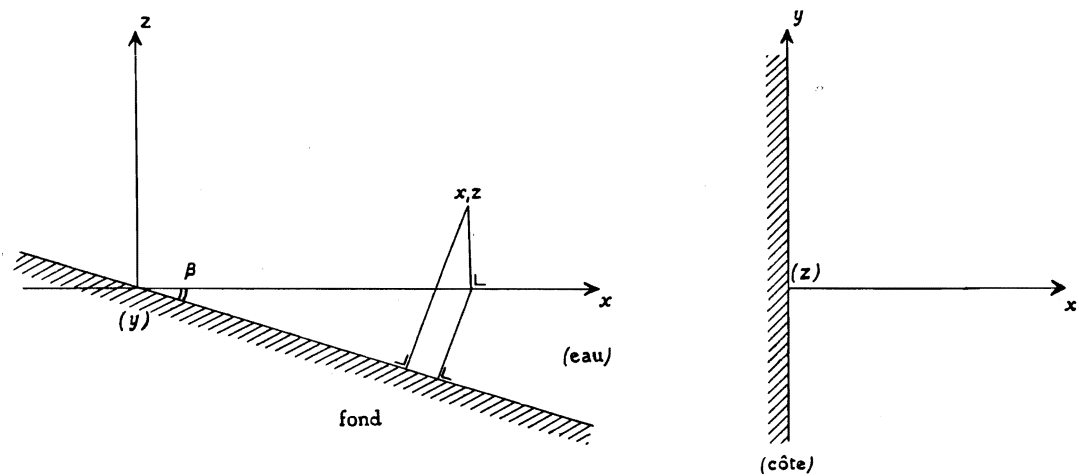


FIG. 69.

Il vient donc, pour le cas présent :

$$\zeta \simeq \frac{kc}{g} \cdot H \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \sin k(y - ct). \quad (\text{IX.12})$$

Mais par ailleurs on a ⁽¹¹²⁾ :

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}$$

d'où (ici)

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -k \sin \beta \cdot H \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \cos k(y - ct), \quad (\text{IX.13})$$

et, en intégrant :

$$\zeta = \frac{H}{c} \sin \beta \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \sin k(y - ct). \quad (\text{IX.13}')$$

⁽¹¹¹⁾ *Id.*, *op. cit.*, § 227, pp. 363-364.

⁽¹¹²⁾ *Id.*, *op. cit.*, § 227, p. 363.

Identifiant les deux expressions donnant ζ (IX.12 et 13') on obtient immédiatement :

$$c^2 = \frac{g}{k} \sin \beta \quad \text{c'est-à-dire} \quad c = \sqrt{\frac{g}{k} \sin \beta}; \quad (\text{IX.14})$$

c'est l'expression donnée par STOKES ⁽¹¹³⁾.

Comme on a $c = \Lambda/T = 2\pi/kT$, on tire de (IX.14)

$$T = \frac{2\pi}{\sqrt{gk \sin \beta}} = \sqrt{\frac{2\pi \Lambda}{g \sin \beta}}. \quad (\text{IX.15})$$

La formule (IX.12) montre clairement la décroissance exponentielle de l'amplitude des oscillations à mesure qu'on s'éloigne de la côte; elle montre également que, dans le problème des « edge-waves » tel que l'a posé G. STOKES, il n'y a pas de nœuds longitudinaux à envisager, contrairement à ce qui a lieu dans le problème analogue d'ondes de marée.

B. — Supposons maintenant que la masse d'eau, au lieu de s'étendre à l'infini dans les deux sens de l'axe Oy , soit de largeur finie, constante, égale à b_0 ; on obtient ainsi un problème à deux dimensions horizontales, avec la condition-frontière en y (murs verticaux en $y = \pm b_0/2$).

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)_{y=\pm b_0/2} = 0, \quad (\text{IX.2})$$

(les axes étant les mêmes qu'au § 1, cf. pp. 266-267).

L'égalité (IX.13') devient ici, en considérant des ondes stationnaires résultant de la superposition d'ondes progressives de même amplitude et de vitesses opposées :

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= \frac{H}{c} \sin \beta \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot [\sin k(y - ct) + \sin k(y + ct)], \\ &= \frac{2H}{c} \sin \beta \cdot e^{-kx \cos \beta} \cdot \sin ky \cdot \cos kt, \\ &= \zeta_0 e^{-\frac{2\pi x}{\Lambda} \cos \beta} \cdot \sin \frac{2\pi}{\Lambda} y \cdot \cos \omega t, \quad (k = 2\pi/\Lambda = \omega/c). \end{aligned} \right\} \quad (\text{IX.16})$$

Dans le problème des « shelf-seiches » on avait, pour la seiche à un nœud transversal et sans nœud longitudinal :

$$\zeta = \zeta_0 e^{i\omega t} \cdot \sin \frac{\pi y}{b_0} \cdot e^{-kx}. \quad (\text{IX.17})$$

Si l'on remarque que dans (IX.16), $\Lambda = 2b_0$ et que $k = \pi/b_0$ dans (IX.17), on voit que (IX.16) et (IX.17) ne diffèrent que par un facteur constant qui multiplie x dans l'exponentielle amortie : dans le cas des « edge-waves », la distance depuis la côte est mesurée par la projection de l'abscisse sur le fond plan

⁽¹¹³⁾ ID., *op. cit.*, § 260, formule 11.

incliné du lac, alors que dans le problème d'ondes de marée « shelf-seiches » elle est mesurée par cette abscisse elle-même. Ces deux grandeurs ne diffèrent que par un facteur constant, à savoir $\cos \beta$: par conséquent, si l'inclinaison du fond est très faible ($\cos \beta \sim 1$), on aboutira pratiquement aux mêmes périodes d'oscillations transversales sans nœud longitudinal, que l'on traite le problème en ondes de surface ou en ondes de marée.

La comparaison entre « shelf-seiches » et « edge-waves » ne pourra donc se faire que pour les « shelf-seiches » sans nœuds longitudinaux.

§ 3. APPLICATION AU LAC TANGANIKA (extrémité nord).

Ainsi qu'on peut le voir sur la carte partielle donnée ci-après, l'extrémité nord du Tanganika présente une forme très régulière, à peu près rectangulaire; sur une distance de plus de 40 km, la largeur du lac ne s'écarte pas notablement de 22 km; la profondeur moyenne $\bar{h}(x)$ (définie par $S(x)/b(x)$, c'est-à-dire supposée constante le long de chacune des sections effectuées perpendiculairement aux côtés du rectangle) croît lentement jusqu'à 140 m environ sur une distance de 13 km, puis reste sensiblement constante sur plus de 15 km; au-delà de cette distance, son comportement devient capricieux.

Il semble donc qu'en linéarisant convenablement $\bar{h}(x)$, on pourrait assimiler les trois ou quatre premiers compartiments du lac à ceux d'un lac déjà étudié : le lac à fond plan incliné et de largeur constante, dans lequel on sait que des « shelf-seiches » à nœuds transversaux peuvent apparaître.

Avant de passer aux calculs numériques, voici une table de mesures. Les sections sont numérotées du nord au sud (voir carte).

Section n°	x km	$S(x)$ km ²	$b(x)$ km	$\bar{b}(x) = \Delta v / \Delta x$ km	Δv km ²	$\bar{h}(x)$ m	$\bar{H} = \frac{S(x)}{21,96 \text{ km}}$ m
1	1	0,835	20,6		20,6	41	38
2	5	2,420	22,6	21,6	86,4	108	110
3	9	2,910	23,6	23,1	92,4	123	133
4	13	2,910	21,2	22,4	89,6	137	133
5	17	2,905	21,2	21,2	84,8	137	132
6	21	2,825	20,6	20,9	83,6	137	129
7	25	3,055	22,0	21,3	85,2	139	139
8	29	3,125	21,2	21,6	86,4	147	142
9	33	3,995	20,8	21,0	84,0	192	182
10	37	4,755	23,2	22,0	88,0	205	217
11	41	5,425	24,6	23,9	95,6	221	247
12	45	5,500	26,0	25,3	101,2	212	—
13	49	5,550	27,2	26,6	106,4	204	—

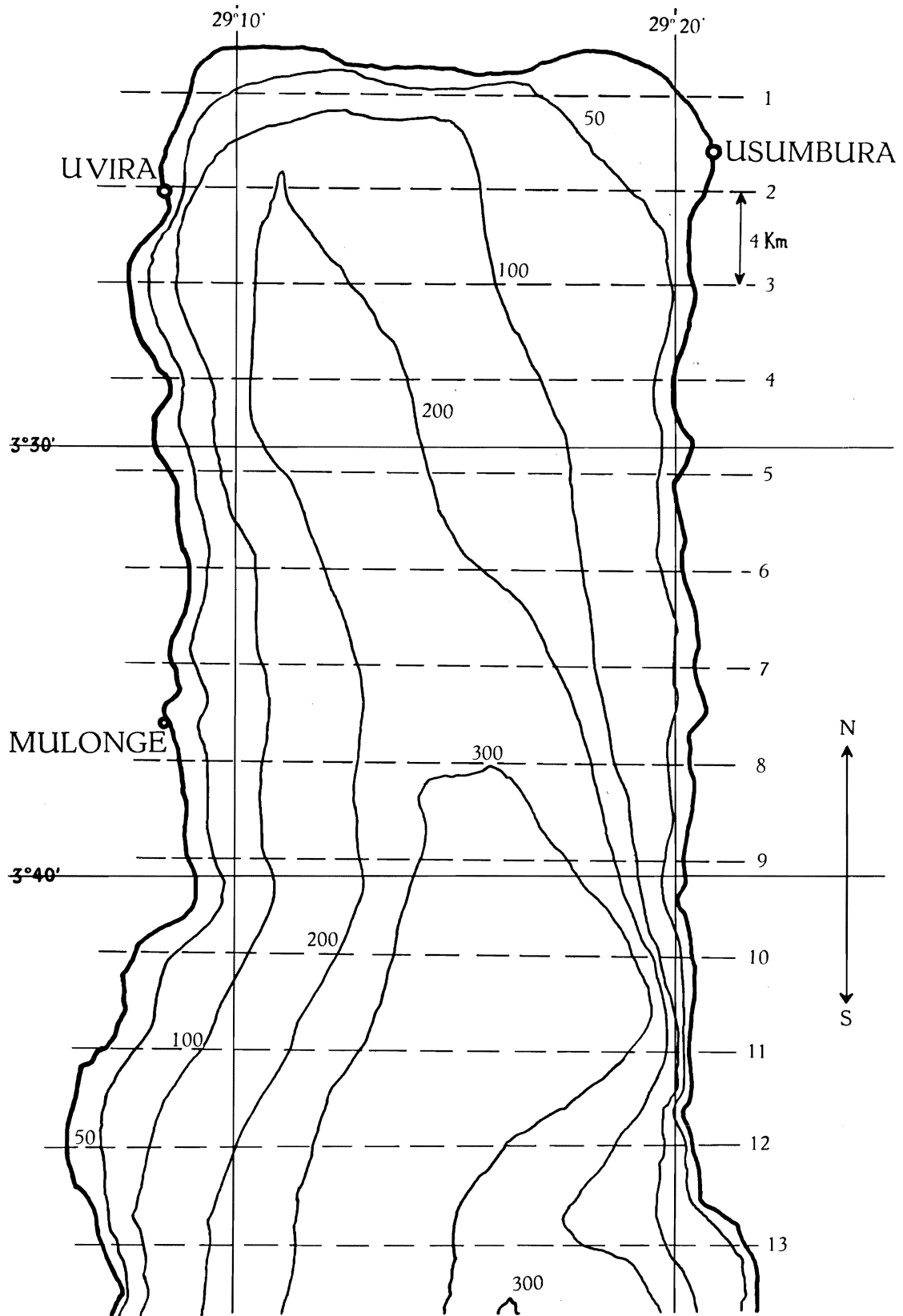


FIG. 70. — Lac Tanganyika. Extrémité nord. Carte bathymétrique.

1-13 : Divisions utilisées pour le calcul des oscillations des types « shelf-seiches » de HIDAKA et « edge-waves » de STOKES.

Remarques.

1. Comme le lac s'élargit notablement à partir de la onzième division, la largeur moyenne de 21,96 km, dont on s'est servi pour calculer $\bar{H}(x)$, a été prise sur les onze premières divisions seulement : c'est pourquoi \bar{H} n'a plus été repris aux nos 12 et 13.

2. La colonne $\bar{b} = \Delta v / \Delta x$ se rapporte aux largeurs moyennes de chaque compartiment : les nombres qui s'y trouvent sont les moyennes arithmétiques des $b(x)$ mesurés aux sections-frontière; c'est ce qui est suggéré par la disposition particulière des nombres de cette colonne.

Voici les résultats numériques :

A. — En traitant le problème selon la théorie des « shelf-seiches » (§ 1).

Bornons-nous à considérer les quatre seiches suivantes :

a) Un nœud transversal, pas de nœud longitudinal ($r = 1, j = 0$), c'est-à-dire

$$\zeta_{10} = \sin \frac{\pi y}{b_0} e^{-x'};$$

valeur propre :

$$\lambda'_{10} = k = \frac{\pi}{b_0}.$$

b) Un nœud transversal, un nœud longitudinal ($r = 1, j = 1$)

$$\zeta_{11} = \sin \frac{\pi y}{b_0} e^{-x'} (1 - 2x');$$

valeur propre :

$$\lambda'_{11} = 3k = \frac{3\pi}{b_0}.$$

c) Deux nœuds transversaux, pas de nœud longitudinal ($r = 2, j = 0$)

$$\zeta_{20} = \cos \frac{2\pi y}{b_0} \cdot e^{-x'};$$

valeur propre :

$$\lambda'_{20} = k = \frac{2\pi}{b_0}.$$

d) Deux nœuds transversaux, un nœud longitudinal ($r = 2, j = 1$)

$$\zeta_{21} = \cos \frac{2\pi y}{b_0} e^{-x'} (1 - 2x');$$

valeur propre :

$$\lambda'_{21} = 3k = \frac{6\pi}{b_0}.$$

Unité naturelle de longueur.

On a montré ci-dessus (§ 1) que l'unité naturelle de longueur x est égale à $1/k$: pour les seiches des deux premiers types, elle est donc de b_0/π et pour celles des deux derniers types, de $b_0/2\pi$.

L'ordre de grandeur de b_0 étant de 22 km, on vérifie aisément qu'à une distance de 14 km environ de la côte nord du lac, les seiches des deux premiers types voient leur amplitude réduite à moins d'un septième de ce qu'elle était sur cette côte même; pour les seiches des deux derniers types, il suffit d'une distance de 7 km pour réduire les amplitudes dans le même rapport. Ces considérations paraissent justifier l'approximation adoptée en assimilant l'extrémité nord du Tanganika à un lac à fond plan incliné de largeur constante.

Linéarisation de $\bar{h}(x)$.

Un premier essai a été fait par la méthode des moindres carrés, mais le résultat en est visiblement peu satisfaisant (cf. fig. 71) : on trouve à l'aide du polynôme $\bar{h}(x) = 26,43 \text{ m} + 9,89 \text{ m} \times 10^{-3} x$ la table suivante :

x km	$\bar{h}(x)$ (polynôme) m	$\bar{h}(x)$ (mesuré) m
0	26,43	0
1	36,32	41
5	75,88	108
9	115,44	123
13	155,00	137

L'usage de ce polynôme obligerait à déplacer fictivement la côte nord de 2,7 km environ vers le nord, de manière à pouvoir écrire :

$$\bar{h}(x') \equiv \beta x' = 9,89 \text{ m} \times 10^{-3} x' \quad (x' = x + 2,70).$$

Afin d'éviter ce « déplacement », il paraît préférable d'utiliser une droite $\bar{h}(x) = \beta x$ tracée empiriquement de manière à ce que les écarts soient faibles surtout au voisinage de la côte nord, région où l'amplitude de la seiche est la plus forte; à 8 ou 10 km de cette côte des écarts plus importants n'auront plus qu'un rôle réduit. A titre de comparaison, plusieurs valeurs de β seront utilisées et les résultats confrontés.

Soient quatre valeurs de β , respectivement égales à 12×10^{-3} , 14×10^{-3} , 16×10^{-3} , 18×10^{-3} (nombres purs); $\bar{h}(x)$ et x sont supposés être exprimés en mètres. Les courbes correspondantes sont données sur la figure 71 et distinguées par les chiffres romains I, II, III et IV respectivement.

Calcul des périodes des seiches.

Seiche du type a) : nœud transversal unique, pas de nœud longitudinal; on a immédiatement :

$$\lambda_{10} \equiv \frac{4\pi^2}{g^2 T^2} = \frac{\pi}{b_0},$$

d'où, en prenant $b_0 = 21,96 \text{ km}$ (cf. remarque 1 de la p. 278), $g = 978 \text{ cm sec}^{-2}$ (le lac Tanganika étant très voisin de l'équateur), et β étant pris successivement égal à 12×10^{-3} , 14×10^{-3} , 16×10^{-3} , 18×10^{-3} :

$$\begin{aligned} T_{10} \text{ (I)} &= 1.533,4 \text{ sec} \simeq 25,5 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (II)} &= 1.419,7 \text{ sec} \simeq 23,7 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (III)} &= 1.328 \text{ sec} \simeq 22,1 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (IV)} &= 1.252 \text{ sec} \simeq 20,9 \text{ min.} \end{aligned}$$

On trouvera plus loin un graphique montrant la décroissance exponentielle en x' de l'amplitude de cette première seiche, ainsi que des trois suivantes.

Seiche du type b) : nœud transversal unique, un nœud longitudinal.

On a $\lambda'_{11} = 3\pi/b_0$, d'où :

$$\begin{aligned} T_{11} \text{ (I)} &= 885,3 \text{ sec} \simeq 14,8 \text{ min;} \\ T_{11} \text{ (II)} &= 819,7 \text{ sec} \simeq 13,8 \text{ min;} \\ T_{11} \text{ (III)} &= 766,7 \text{ sec} \simeq 12,8 \text{ min;} \\ T_{11} \text{ (IV)} &= 722,8 \text{ sec} \simeq 12,0 \text{ min.} \end{aligned}$$

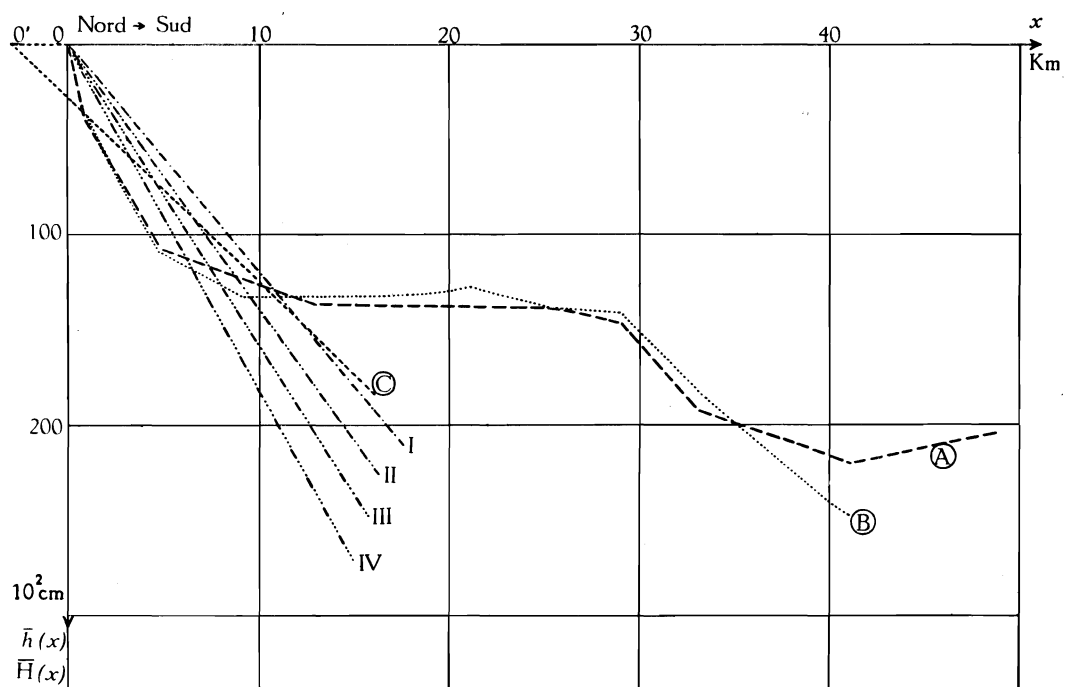


FIG. 71. — Lac Tanganyika. Extrémité nord.

Courbe **A** : profondeur moyenne $\bar{h}(x) = S(x)/b(x)$; courbe **B** : profondeur moyenne $\bar{H}(x) = S(x)/b_0$; courbe **C** : profondeur linéarisée par moindres carrés $h(x') = \beta x'$; courbes I-IV : essais divers de linéarisation empirique de $h(x)$ au voisinage de l'extrémité nord du lac.

On a bien

$$T_{10}/T_{11} = \sqrt{3} \quad (\text{en effet } \lambda'_{11}/\lambda'_{10} = 3).$$

Seiches du type c) : deux nœuds transversaux, pas de nœud longitudinal.

On a $\lambda'_{20} = 2\pi/b_0$, d'où :

$$\begin{aligned} T_{20} \text{ (I)} &= 1.084,3 \text{ sec} \simeq 18,0 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (II)} &= 1.003,9 \text{ sec} \simeq 16,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (III)} &= 939,0 \text{ sec} \simeq 15,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (IV)} &= 885,3 \text{ sec} \simeq 14,7 \text{ min} \end{aligned}$$

$$(T_{40}/T_{20} = \sqrt{2}, \text{ puisque } \lambda'_{20}/\lambda'_{40} = 2).$$

Seiches du type *d*) : deux nœuds transversaux, un nœud longitudinal.

On a $\lambda'_{21} = 6\pi/b_0$, d'où :

$$\begin{aligned} T_{21} \text{ (I)} &= 626,0 \text{ sec} \simeq 10,5 \text{ min;} \\ T_{21} \text{ (II)} &= 579,6 \text{ sec} \simeq 9,6 \text{ min;} \\ T_{21} \text{ (III)} &= 542,2 \text{ sec} \simeq 9,0 \text{ min;} \\ T_{21} \text{ (IV)} &= 511,1 \text{ sec} \simeq 8,5 \text{ min} \end{aligned}$$

$$(T_{10}/T_{21} = \sqrt{6}, \text{ puisque } \lambda'_{21}/\lambda'_{10} = 6).$$

On voit que la période varie notablement suivant la valeur de β que l'on adopte; par suite, la méthode ici employée permet de calculer une valeur seulement approximative des périodes d'oscillation transversales. Suivant le type de seiches considéré, la période moyenne est de 23 min (type *a*), 13,3 min (type *b*), 16,3 min (type *c*) et 9,4 min (type *d*); pour chacune de ces périodes, l'erreur peut atteindre 10 % en valeur absolue, et son signe est incertain.

Distribution longitudinale des amplitudes. Étude des fonctions $w(x')$.

Seiches du type *a*) : $w_{10} = e^{-x'}$.

Unité naturelle de longueur : $1/k$ (cf. p. 278), c'est-à-dire $21,96 \text{ km}/\pi \simeq 7 \text{ km}$. Il s'ensuit qu'à 10 km de la côte nord, l'amplitude de la seiche est réduite au quart de sa valeur au voisinage immédiat de cette côte; au-delà de $x \simeq 10 \text{ km}$, c'est-à-dire $\simeq 1,4$ unité naturelle de longueur, la fonction $\bar{h}(x)$ cesse d'être représentée de manière acceptable par βx (quel que soit la valeur de β parmi les quatre proposées), et par conséquent la discussion tombe à faux. Le profil a la forme bien connue de l'exponentielle amortie (cf. fig. 72).

Seiches du type *b*) : $w_{11} = e^{-x'}(1 - 2x')$.

Même unité naturelle de longueur, voisine de 7 km.

Le nœud longitudinal se situe en $x' = 1/2 \simeq 3,5 \text{ km}$ de la côte nord; sa position est indépendante de la pente du fond, cette dernière ne modifiant que la période d'oscillation et non le profil de la seiche.

La fonction w_{11} admet un extrémum en $x' = 3/2 = 1,5 \text{ U.L.} \simeq 10,5 \text{ km}$; à cet endroit $w_{11} = -2e^{-3/2} \simeq 0,44$, c'est-à-dire un peu moins de la moitié de sa valeur initiale.

Pour le profil, voir la figure 72.

Seiches du type *c*) : même profil longitudinal que celles du type *a*), mais l'unité naturelle de longueur n'étant que de $b_0/2\pi \simeq 3,5 \text{ km}$, la décroissance de l'exponentielle est beaucoup plus rapide que pour les seiches des types *a*) et *b*) : pour $x = 10 \text{ km}$, l'amplitude est réduite à moins de 6 % de sa valeur initiale (courbe w_{20}).

Seiches du type *d*) : même profil longitudinal que celles du type *b*), mais comme dans le type *c*), l'unité naturelle de longueur n'est plus que de 3,5 km; l'extrémum se situe ainsi vers 5,25 km, et pour $x = 10,5 \text{ km} = 3 \text{ U.L.}$, l'amplitude est inférieure à 25 % de sa valeur initiale (courbe w_{21}).

En conclusion, on voit donc que c'est surtout pour les seiches à deux nœuds transversaux que l'approximation adoptée pour le bassin nord du Tanganika paraît satisfaisante. Elle le serait évidemment encore davantage pour les seiches à trois nœuds transversaux, mais celles-ci, fortement concentrées le long de la côte, et de périodes très courtes, seront sans doute trop rapidement amorties pour être bien observables.

Voici pour terminer le graphique des fonctions $w(x')$ relatives aux quatre types de seiches étudiés; l'axe Ox' est gradué en unités naturelles de longueur et $w(x')$ est pris égal à un en $x' = 0$.

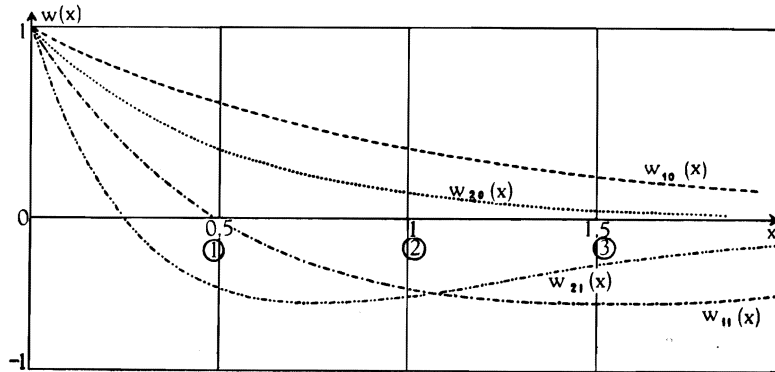


FIG. 72. — Lac Tanganika. Extrémité nord.
Distribution de l'amplitude $w_{rj}(x')$ des « shelf-seiches »
(r = nombre de nœuds transversaux; j = nombre de nœuds longitudinaux).
N. B. — x doit être remplacé par x' sur cette figure.

B. — En traitant le problème suivant la théorie des « edge-waves » (§ 2).

Limitons-nous à nouveau aux seiches à un et à deux nœuds transversaux. On aura, en prenant à nouveau $b_0 = 21,96$ km : $\Lambda_1 = 43,92$ km, $\Lambda_2 = 21,96$ km.

Reprenons les quatre valeurs précédemment proposées pour la pente du fond plan incliné : $\text{tg } \beta = 12 \times 10^{-3}$, 14×10^{-3} , 16×10^{-3} et 18×10^{-3} (distinguées respectivement par les chiffres I, II, III et IV). L'écart entre le sin et la tg étant négligeable ici, on confondra ces deux fonctions pour l'argument β , et l'on retrouve ainsi les résultats obtenus en A, c'est-à-dire :

$$\begin{aligned} T_{10} \text{ (I)} &\simeq 25,5 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (II)} &\simeq 23,7 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (III)} &\simeq 22,1 \text{ min;} \\ T_{10} \text{ (IV)} &\simeq 20,9 \text{ min;} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_{20} \text{ (I)} &\simeq 18,0 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (II)} &\simeq 16,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (III)} &\simeq 15,7 \text{ min;} \\ T_{20} \text{ (IV)} &\simeq 14,7 \text{ min.} \end{aligned}$$

(On remarque que seules les seiches sans nœuds longitudinaux se retrouvent par les deux voies.)

§ 4. LES « BANK-SEICHES ».

K. HIDAOKA, dans un article déjà cité (cf. p. 266, note 106), pose la question de savoir si l'existence d'un rivage est absolument nécessaire pour que des seiches puissent apparaître dans une masse d'eau. Il répond par la négative, à savoir que la présence d'un haut-fond suffit, et traite sommairement, à une seule dimension horizontale, le cas particulier du haut-fond hyperbolique.

Avant de passer à l'exposé de cette théorie, remarquons que l'hypothèse du parallélisme des tranches liquides, sur laquelle elle se fonde essentiellement (c'est un problème d'ondes de marée !), tombe certainement en défaut aux très grandes profondeurs, c'est-à-dire loin du sommet du haut-fond. Néanmoins, comme à ces endroits l'amplitude des dénivellations sera fortement réduite, la théorie de HIDAOKA conserve son intérêt pour les régions au voisinage de ce sommet, où l'hypothèse du parallélisme des tranches se vérifie le mieux. Ceci permet de comprendre la véritable nature des « bank-seiches » de HIDAOKA; elles constituent la modification, due à un haut-fond, de systèmes d'ondes stationnaires dans un milieu de profondeur croissante.

A. — Le haut-fond hyperbolique de K. HIDAOKA.

1. Supposons un océan sans limite, dont la profondeur soit donnée par

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}};$$

on a ainsi un haut-fond hyperbolique dont le sommet est situé à l'origine (la profondeur est mesurée positivement vers le bas) (cf. fig. 73).

On a alors, avec les notations habituelles, et le mouvement étant supposé stationnaire ($\lambda' = \omega^2 / gh_0$) :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda' \zeta = 0. \quad (\text{IX.18})$$

Changeons de variable : $x/a = z$, et posons avec HIDAOKA : $2\lambda'a^2 = \theta$. Il vient :

$$\frac{d}{dz} \left[\sqrt{1+z^2} \frac{d\zeta}{dz} \right] + \frac{1}{2} \theta \cdot \zeta = 0. \quad (\text{IX.18}')$$

Remarquons ici en passant que si z devient très grand devant 1, on retrouve le cas du fond plan incliné ⁽¹¹⁴⁾ (traité ci-dessus pp. 266 sqq.), et l'équation (IX.18') prend la forme de l'équation bien connue de BESSEL-FOURIER (IX.10'), dont la solution est $\zeta = J_0(\sqrt{2z\theta})$: il n'y a donc plus de périodes propres d'oscillation, alors que dans le cas du haut-fond hyperbolique, il existe des périodes propres, comme nous le verrons plus loin. Ceci rejoint les conclusions du § 1 (cf. p. 272).

Faisons ensuite $z = \sinh 2u$; on obtient :

$$\frac{d^2 \zeta}{du^2} + 2\theta \cosh 2u \cdot \zeta = 0. \quad (\text{IX.19})$$

Comme condition-frontière, il est naturel d'exiger $\zeta(\pm \infty) = 0$, les solutions restant évidemment partout finies.

En s'inspirant de la théorie des équations de MATHIEU, dont on peut formellement déduire (IX.19), si l'on considère l'équation $y'' + (a - 2\theta \cos 2x)y = 0$, et qu'on fasse $x = iu$, $a = 0$, K. HIDAOKA est amené à envisager quatre classes de solutions pour (IX.19), qu'il désigne par $Ce_{2n}(u, \theta)$, $Se_{2n+1}(u, \theta)$, $Ce_{2n+1}(u, \theta)$, $Se_{2n+2}(u, \theta)$ ($n = 0, 1, 2, \dots$), et il ne reste plus qu'à calculer θ de manière que a puisse être nul ⁽¹¹⁵⁾.

⁽¹¹⁴⁾ On remarque que ce plan n'est autre que le plan asymptote du cylindre hyperbolique

$$y = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

⁽¹¹⁵⁾ Il est à remarquer que la parenté de ces fonctions avec les fonctions de MATHIEU désignées par des notations analogues est purement formelle, tout comme celle qui existe entre les fonctions sin, cos, etc., et sinh, cosh, etc., par exemple.

Première classe. — Solutions $Ce_{2n}(u, \theta)$.

Développons-les en série de cosh : $Ce_{2n}(u, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}(\theta) \cdot \cosh 2ru$, et introduisons cette série dans (IX.19).

On obtient la suite de relations de récurrence :

$$\begin{aligned} \theta A_2 &= 0; \\ 2\theta A_0 + 2^2 A_2 + \theta A_4 &= 0; \\ \theta A_2 + 4^2 A_4 + \theta A_6 &= 0 \\ &\dots \\ \theta A_{2r-2} + (2r)^2 A_{2r} + \theta A_{2r+2} &= 0. \quad (116) \end{aligned}$$

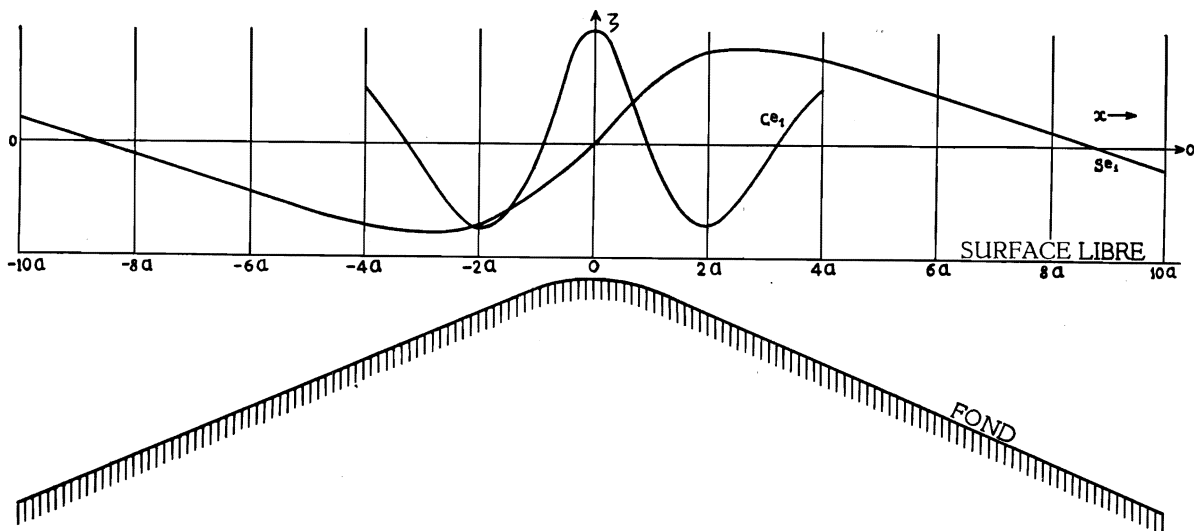


FIG. 73. — Haut-fond hyperbolique dans une masse d'eau sans rivage et profils de quelques types de seiches pouvant y apparaître. [D'après K. HIDAKA, Mem. Imper. Mar. Obs., VI, 1 (1935), pp. 1-8.]

On peut y satisfaire en prenant $\theta = 0$, ce qui annule tous les A (période infiniment longue, c'est-à-dire état de repos). Mais on peut également prendre (cas non relevé par HIDAKA) $A_2 = 0$; on trouve alors, en n'utilisant pas la 2^e relation (réservée pour le calcul de A_0 une fois qu'on aura trouvé des valeurs pour les autres coefficients), la fraction continue :

$$K_{2r} = - \frac{\theta}{(2r)^2 + \theta K_{2r}} \quad \left(K_{2r+2} = \frac{A_{2r+2}}{A_{2r}} \right),$$

avec $K_0 = - \frac{4^2}{\theta}$. En itérant, on peut écrire :

$$4^2 - \frac{\theta^2}{6^2 - \frac{\theta^2}{8^2 - \frac{\theta^2}{10^2 - \dots}}} = 0. \quad (IX.20)$$

(116) Il est à remarquer qu'à chaque racine θ de l'équation (IX.20) ci-après correspond un système de valeurs pour les A_{2r} , c'est-à-dire une solution Ce distincte. Même remarque pour les autres classes de solutions ci-après.

C'est l'équation aux valeurs propres des solutions de la première classe, dont la plus basse racine, θ_0 , est voisine de 21,3. La période correspondante est égale à $1,925 a/\sqrt{gh_0}$.

On attribue ensuite arbitrairement une valeur non nulle à A_0 , et on calcule les autres coefficients à l'aide des relations de récurrence.

Deuxième classe. — Solutions $Se_{2n+1}(u, \theta)$.

Développons les en série de \sinh : $Se_{2n+1}(u, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}(\theta) \cdot \sinh(2r+1)u$.

On trouve, comme pour la 1^{re} classe, une série de relations de récurrence qui conduit à l'équation aux valeurs propres écrite, sous forme de fraction continue :

$$\theta - 1 + \frac{\theta^2}{3^2} - \frac{\theta^2}{5^2} + \frac{\theta^2}{7^2} - \dots = 0. \quad (\text{IX.21})$$

La plus basse racine en est voisine de 0,91 (HIDAKA donne un résultat très précis : $\theta_1 = 0,9080463\dots$); la période correspondante (c'est le fondamental) est donnée par $T_1 = 9,325 a/\sqrt{gh_0}$.

Néanmoins la valeur $\theta = 0$ est aussi possible; il suffit de l'introduire dans les relations de récurrence en B pour voir qu'elle entraîne l'annulation de tous les coefficients : c'est à nouveau l'état de repos.

Troisième classe. — Solutions $Ce_{2n+1}(u, \theta)$, qu'on peut développer en série de \cosh : $Ce_{2n+1}(u, \theta) = \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1}(\theta) \cdot \cosh(2r+1)u$.

On trouve, toujours de la même manière, l'équation aux valeurs propres :

$$-\theta - 1 + \frac{\theta^2}{3^2} - \frac{\theta^2}{5^2} + \frac{\theta^2}{7^2} - \dots = 0, \quad (\text{IX.22})$$

dont la plus basse racine a pour valeur 7,514...; la période correspondante est $T = 3,24 a/\sqrt{gh_0}$. En outre, comme pour la 2^e classe, $\theta = 0$ reste possible : tous les C s'annulent à nouveau (état de repos!).

Quatrième classe (HIDAKA en signale simplement l'existence, mais ne donne aucun calcul). — Solutions : $Se_{2n+2}(u, \theta)$ ou, sous forme de série de \sinh :

$$Se_{2n+2}(u, \theta) + \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2}(\theta) \cdot \sinh(2r+2)u.$$

L'équation aux valeurs propres est :

$$2^2 - \frac{\theta^2}{4^2} - \frac{\theta^2}{6^2} - \frac{\theta^2}{8^2} - \dots = 0, \quad (\text{IX.23})$$

dont la racine la plus basse est voisine de 7,587⁽¹¹⁷⁾; on en tire $T = 3,225 a/\sqrt{gh_0}$. Ici

⁽¹¹⁷⁾ Il est curieux de constater combien les racines les plus basses des équations (IX.22) et (IX.23) sont extraordinairement voisines : l'écart est inférieur à 1 %. On vérifie toutefois qu'elles sont bien distinctes.

encore $\theta = 0$ est possible : tous les D s'annulent (état de repos). On voit donc que l'état de repos ($\theta = 0$, $\zeta = 0$ partout) n'appartient en propre à aucune classe de solutions, contrairement à ce qu'affirme HIDAOKA, qui le rattache aux solutions du type $Ce_{2n}(u, \theta)$ (série de cosh d'argument « pair »).

Une comparaison s'impose encore entre les résultats qui viennent d'être donnés et la formule de Merian : $T_k = 2l/k\sqrt{gh_0}$, applicable au bassin de profondeur uniforme h_0 et de longueur l . HIDAOKA remarque que pour $l \rightarrow \infty$, les T_n (profondeur constante) deviennent tous infinis, alors que, dans son cas de « bank-seiches », seul le « fondamental » (si l'on peut appeler ainsi l'état de repos) est infini, toutes les autres périodes étant finies (malgré l'étendue infinie de son océan) — conclusion qui lui paraît paradoxale (« very queer but nevertheless true »). Pour faire le raccord entre les deux cas, il nous semble qu'il suffit d'observer que les périodes de « bank-seiches » de HIDAOKA sont proportionnelles à a , quantité dont l'inverse du carré mesure la pente du haut-fond :

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{h_0 x}{a^2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2};$$

si cette pente devient nulle, c'est-à-dire si a devient infini, on retrouve un océan de profondeur constante, $= h_0$, de longueur infinie, et dont tous les modes d'oscillation ont bien une période infinie (pour autant que cette manière d'envisager les choses ait encore un sens !), puisque proportionnelle à a .

2. A la suite de son article sur les « bank-seiches » (cas du haut-fond hyperbolique qui vient d'être traité), K. HIDAOKA envisage un cas particulier assez imprévu : celui d'un « haut-fond » hyperbolique au sommet duquel se trouve construit un petit mur vertical, jouant le rôle d'une côte (cf. fig. 74).

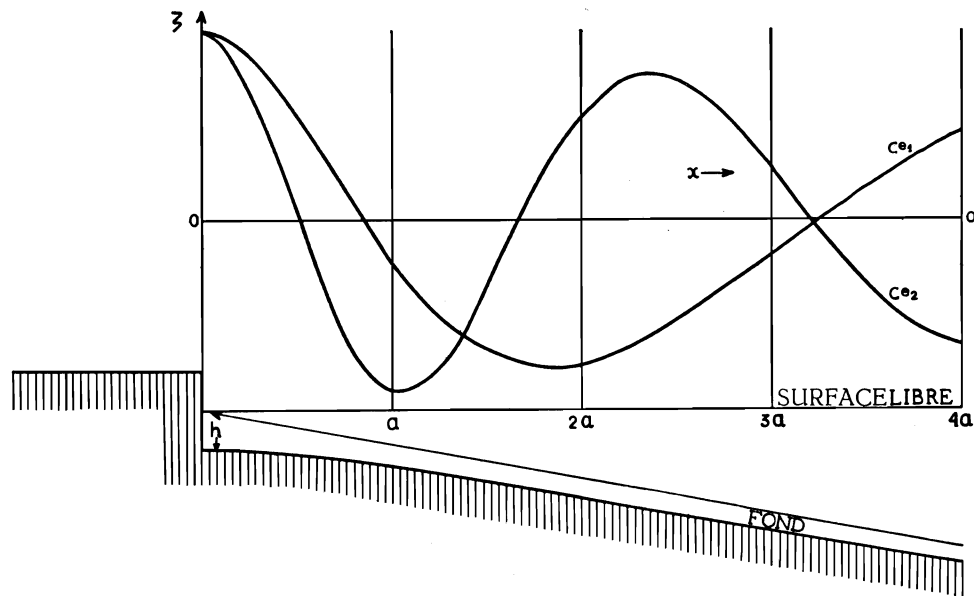


FIG. 74. — « Haut-fond » hyperbolique, au sommet duquel se trouve un mur vertical formant côte, et profils de quelques types de seiches pouvant y apparaître.

(D'après K. HIDAOKA, même article.)

h_0 est ainsi la profondeur immédiatement devant cette côte et a est la distance de cette dernière à l'isobathe $h_0 \sqrt{2}$.

L'équation à résoudre est la même que ci-dessus (IX.18) mais avec la condition-frontière supplémentaire $\zeta'(0) = 0$: le mouvement de l'eau perpendiculairement au rivage est nul (ventre à l'origine). Il s'ensuit que seules les solutions des classes I et III (séries en cosh) seront recevables.

Il faut souligner ici que, contrairement à ce qui a lieu pour un rivage plan incliné, pour lequel il n'y a pas de périodes propres d'oscillation (cf. p. 272), le « haut-fond » hyperbolique avec mur se comporte, en ce qui concerne les périodes propres, comme un haut-fond hyperbolique sans mur : il empêche l'existence d'ondes stationnaires de période quelconque; c'est seulement lorsque a devient très petit, c'est-à-dire lorsque la branche d'hyperbole tend à se confondre à l'origine avec son asymptote, que des ondes stationnaires de période quelconque deviennent possibles; en effet, on retrouve alors le cas du rivage plan incliné.

B. — On peut traiter d'une manière analogue un autre cas simple : celui du haut-fond parabolique : $h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)$ (cf. fig. 75).

1. Pour le problème à une dimension horizontale (océan de largeur infinie), l'équation en ζ s'écrit ($\lambda' = \omega^2/g h_0$) :

$$\frac{d}{dx} \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right) \frac{d\zeta}{dx} \right] + \lambda' \zeta = 0. \quad (\text{IX.24})$$

Posons $x/a = z$, multiplions (IX.24) par $(1 + z^2)$ et changeons de variable en posant $(1 + z^2) \frac{d}{dz} = \frac{d}{dv}$, c'est-à-dire $v = \int \frac{dz}{1 + z^2}$ ou $z = \text{tg } v$.

Le champ de la nouvelle variable est ainsi $-\pi/2 \leq v \leq +\pi/2$ (celui de z était $-\infty \leq z \leq +\infty$).

L'équation (IX.24) devient

$$\frac{d^2 \zeta}{dv^2} + \lambda' a^2 \cdot \sec^2 v \cdot \zeta = 0. \quad (\text{IX.25})$$

Comme conditions-frontière, on prendra à nouveau $\zeta(\pm \infty) = 0$ (variable indépendante z) ou $\zeta(\pm \pi/2) = 0$ (variable indépendante v). L'équation (IX.25) elle-même le suggère : pour $|v| \rightarrow \pi/2$, $\sec^2 v \rightarrow \infty$; il faut donc $\zeta(\pm \pi/2) = 0$. De là l'idée d'essayer comme solutions des séries en $\cos(2r+1)v$ et en $\sin(2r+2)v$ ($r = 0, 1, 2, \dots$), dont tous les termes s'annuleront pour $v = \pm \pi/2$, et, accessoirement, des séries en $\cos 2rv$ et en $\sin(2r+1)v$, dont la dérivée première s'annule pour $v = \pm \pi/2$. Considérons donc des solutions des quatre classes suivantes :

$$\begin{aligned} a) \quad \zeta &= \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r}(\theta) \cdot \cos 2rv; \\ b) \quad \zeta &= \sum_{r=0}^{\infty} B_{2r+1}(\theta) \cdot \sin(2r+1)v; \\ c) \quad \zeta &= \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1}(\theta) \cdot \cos(2r+1)v; \\ d) \quad \zeta &= \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2}(\theta) \cdot \sin(2r+2)v. \end{aligned}$$

Pour la signification des θ entre parenthèses, cf. page 284, note 116. La convergence de ces séries est assurée; en effet, les relations entre coefficients (voir ci-après) montrent que pour un indice $k \rightarrow \infty$, le rapport de D'ALEMBERT des séries ΣA_i , ΣB_i , etc... tend vers une limite inférieure à l'unité.

En ce qui concerne les indices des coefficients A, B, C, D et les coefficients de v dans les arguments des fonctions circulaires, il est indispensable de les prendre de même parité; en effet, les relations de récurrence auxquelles on est conduit en prenant par exemple $\zeta = \sum_{j=0}^{\infty} a_j \cos jv$, c'est-à-dire en négligeant cette précaution, se partagent en deux classes : celle des j pairs et celle des j impairs, de sorte que l'on obtient deux solutions linéairement indépendantes que l'on doit séparer, les valeurs propres de l'une ne convenant pas à l'autre.

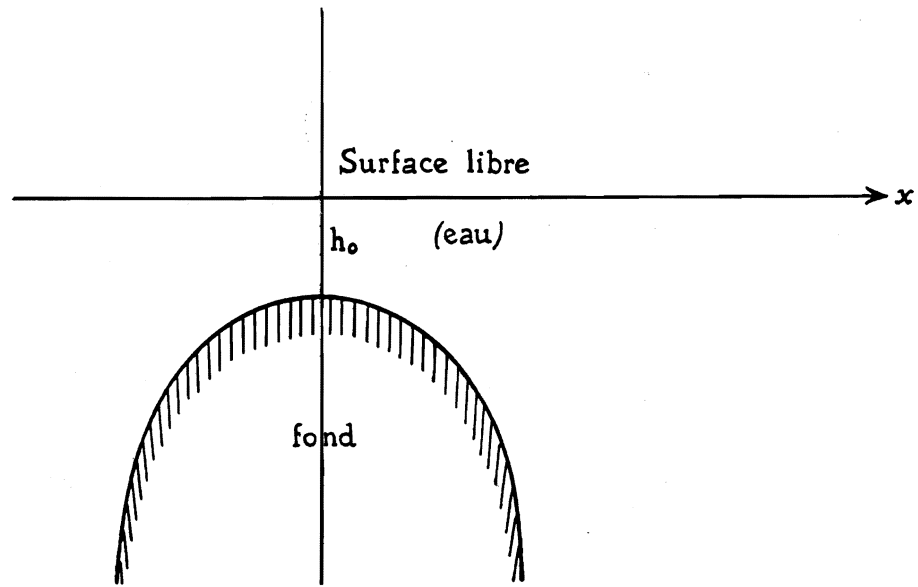


FIG. 75. — Haut-fond parabolique.

a) Première classe. — Introduisons la série $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cos 2rv$ dans (IX.25) multipliée au préalable par $\cos^2 v$ et annulons les coefficients de $\cos 2rv$; il vient (en posant $4\lambda^2 a^2 = \mu$) :

$$\begin{aligned} & -\mu A_0 + 2^2 A_2 = 0; \\ & -(\mu - 2 \cdot 2^2) A_2 + 4^2 A_4 = 0; \\ & 2^2 A_2 - (\mu - 2 \cdot 4^2) A_4 + 6^2 A_6 = 0; \\ & \dots \dots \dots \\ & (2r - 2)^2 A_{2r-2} - [\mu - 2(2r)^2] A_{2r} + (2r + 2)^2 A_{2r+2} = 0. \end{aligned}$$

Posons encore $A_{2r}/A_{2r-2} = K_{2r}$; on a alors

$$K_4 = \frac{\mu - 2 \cdot 2^2}{4^2} \quad \text{et} \quad K_{2r} = \frac{(2r - 2)^2}{\mu - 2(2r)^2 - (2r + 2)^2 K_{2r+2}} \quad (r \geq 3).$$

En itérant, on trouve l'équation aux valeurs propres (pour laquelle la 1^{re} relation de récurrence n'est pas utilisée) :

$$\mu - 2.2^2 - \frac{2^2.4^2}{\mu - 2.4^2} - \frac{4^2.6^2}{\mu - 2.6^2} - \frac{6^2.8^2}{\mu - 2.8^2} - \dots = 0. \quad (\text{IX.26})$$

La plus basse racine est voisine de 3,39.

Cette équation n'admet pas de racine nulle, mais, à cause de la première relation de récurrence, il est néanmoins possible de prendre $\mu = 0$; tous les A s'annulent alors nécessairement (sauf A_0 qui est quelconque, mais peut évidemment être nul); ζ est ainsi nul (ou constant) : c'est l'état de repos, qu'on peut, à la rigueur, considérer avec HIDAHA comme une sorte de mode « pré-fondamental » ($T = \infty$).

b) Deuxième classe. — En procédant comme ci-dessus, on obtient l'équation :

$$\mu - 1^2 - \frac{1^2.3^2}{\mu - 2.3^2} - \frac{3^2.5^2}{\mu - 2.5^2} - \frac{5^2.7^2}{\mu - 2.7^2} - \dots = 0. \quad (\text{IX.27})$$

La racine la plus basse de cette équation (arrêtée à la 6^e réduite) est voisine de 0,129; mais la convergence de la fraction étant plutôt lente, il n'est pas sûr que la seconde décimale soit exacte.

Enfin, $\mu = 0$ ne suffit pas à annuler tous les coefficients B , et (IX.27) n'admet pas de racine nulle; l'état de repos n'appartient donc pas à cette classe de solutions.

c) Troisième classe. — $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} C_{2r+1} \cos(2r+1)v$.

Équation aux valeurs propres :

$$\mu - 3 - \frac{1^2.3^2}{\mu - 2.3^2} - \frac{3^2.5^2}{\mu - 2.5^2} - \frac{5^2.7^2}{\mu - 2.7^2} - \dots = 0. \quad (\text{IX.28})$$

La racine la plus basse en est $\mu_0 = 1,86$ environ (fraction arrêtée à la 6^e réduite; même remarque qu'au cas précédent : convergence lente). Ici encore $\mu = 0$ ne suffit pas à annuler tous les C , et (IX.28) n'admet pas de racine nulle : l'état de repos n'appartient donc pas non plus à la classe III.

d) Quatrième classe. — $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2} \sin(2r+2)v$.

Équation aux valeurs propres :

$$\mu - 2.2^2 - \frac{2^2.4^2}{\mu - 2.4^2} - \frac{4^2.6^2}{\mu - 2.6^2} - \frac{6^2.8^2}{\mu - 2.8^2} - \dots = 0. \quad (\text{IX.29})$$

La plus basse racine est voisine de 3,39 (fraction arrêtée à la 6^e réduite, mais convergence lente !). Comme dans les deux cas précédents, $\mu = 0$ n'entraîne pas la nullité de tous les D , de sorte que l'état de repos n'appartient pas à la classe IV.

Il est à remarquer que cette dernière équation (IX.29) est identique à l'équation (IX.26). Les solutions des classes I et IV auront donc des coefficients égaux à partir de l'indice 2; en effet D_{2r} n'existe pas pour $r = 0$ et A_0 se calcule séparément à l'aide de la première relation de récurrence, non utilisée dans l'établissement de l'équation (IX.26).

Les valeurs propres seront égales; il s'ensuit qu'à une même période d'oscillation pourront correspondre deux types de profils : l'un (série de sinus) présentera certainement un nœud à l'origine ($\zeta = 0$, tous les sinus s'y annulant); de l'autre (série de cosinus) on ne pourra rien affirmer a priori quand à l'existence d'un nœud ou d'un ventre à l'origine : tous les cosinus y seront égaux à $+1$, de sorte que la valeur de ζ dépendra uniquement de celle des coefficients A_{2r} .

Les solutions trouvées en complétant les calculs de HIDAOKA ne présentent rien de semblable; aux séries $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} A_{2r} \cosh 2ru$ et $\zeta = \sum_{r=0}^{\infty} D_{2r+2} \sinh (2r+2)u$ correspond, il est vrai, la même relation de récurrence générale, mais les relations de récurrence initiales sont différentes, et de ce fait les équations aux valeurs propres sont aussi différentes; il est d'ailleurs aisé de se rendre compte que l'équation (IX.20) et l'équation (IX.23) ne sauraient avoir de racines communes, puisque le premier membre de (IX.20) figure comme dénominateur dans (IX.23).

Pour terminer, on peut dresser un petit tableau groupant les résultats numériques relatifs aux deux types de haut-fond étudiés. Les périodes sont exprimées en unités $a/\sqrt{gh_0}$.

Classe	Haut-fond hyperbolique		Haut-fond parabolique	
	Valeur propre la plus basse	Période	Valeur propre la plus basse	Période
I	$\theta \simeq 21,3$	1,925	$\mu = 3,39$ (zéro possible)	6,825 (∞)
II	$\theta \simeq 0,908$	9,325	$\mu = 0,129$	34,98
III	$\theta \simeq 7,514$	3,241	$\mu = 1,86$	9,214
IV	$\theta \simeq 7,587$	3,226	$\mu = 3,39$	6,825

Les périodes des seiches dues au haut-fond parabolique sont donc de deux à quatre fois plus longues que celles des seiches dues au haut-fond hyperbolique, ce qui est à première vue paradoxal, puisque la profondeur de l'océan est plus grande dans le premier cas que dans le second.

Le paradoxe disparaît si l'on observe que la formule de MERIAN (pour bassins

fermés) $T \sim h^{-1/2}$ ne vaut que pour une profondeur petite devant la longueur d'onde de la seiche, et assez peu variable pour qu'on puisse négliger h' devant h . En comparant les profils des deux fonds, on voit que la zone où la formule est applicable est beaucoup moins étendue dans le cas du haut-fond parabolique que dans celui du haut-fond hyperbolique; la profondeur « efficace » moyenne sera donc bien moindre dans le premier cas que dans le second. Notamment, si a est très grand, la pente du haut-fond hyperbolique,

$h'_{\text{HYP}} = \frac{h_0 x}{a^2} \left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{-1/2}$ pourra être très faible (pratiquement constante à partir de x suffisamment grand, de l'ordre de a^2), alors que celle du haut-fond parabolique croît indéfiniment avec x ($h'_{\text{PAR}} = 2h_0 x/a$).

Les rapports des périodes n'ont alors plus rien de surprenant.

Orthogonalité des fonctions propres.

L'équation (IX.25), étant manifestement « auto-adjointe », peut se transformer en une équation intégrale à noyau symétrique; il en résulte que toutes les fonctions propres des 4 classes sont orthogonales entre elles ⁽¹¹⁸⁾, c'est-à-dire que si l'on désigne par $\mathcal{C}e_m(\mu, v)$ les solutions des classes I et III (séries de cos) et par $\mathcal{S}e_m(\mu, v)$ les solutions des classes II et IV (séries de sin), on a (fonctions normées!) :

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{C}e_m \mathcal{C}e_n dv = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases}; \quad \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{S}e_m \mathcal{S}e_n dv = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ 1 & (m = n) \end{cases};$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \mathcal{C}e_m \mathcal{S}e_n dv = 0, \quad (m = n \quad \text{ou} \quad m \neq n \text{ indifféremment.})$$

2. Le problème à deux dimensions horizontales.

Soit un canal de largeur finie, constante, égale à b_0 , et dont la profondeur est donnée, comme au 1., par

$$h(x) = h_0 \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right);$$

le canal s'étend évidemment à l'infini dans les deux sens.

L'équation à résoudre est maintenant :

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial \zeta}{\partial x} \right] + \left(1 + \frac{x^2}{a^2} \right) \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \lambda' \zeta = 0 \quad (\text{IX.30})$$

avec les conditions-frontière

$$\zeta = 0 \quad \text{pour} \quad x = \pm \infty, \quad \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} \right)_{y=\pm b_0/2} = 0.$$

Posons comme précédemment :

$$\zeta = \cos \frac{p\pi y}{b_0} \cdot w(x) \quad \text{ou} \quad \zeta = \sin \frac{q\pi y}{b_0} \cdot w(x)$$

($p =$ entier pair, $q =$ entier impair, désignant le nombre de nœuds transversaux); posons encore :

$$\left(\frac{p\pi}{b_0} \right)^2 = k^2 \quad \left(\text{ou} \quad \left(\frac{q\pi}{b_0} \right)^2 = k^2 \right); \quad \frac{x}{a} = z; \quad \lambda' a^2 = \mu; \quad k^2 a^2 = \theta^2;$$

(μ et θ^2 : nombres purs);

L'équation (IX.30) devient :

$$\frac{d}{dz} \left[(1+z^2) \frac{dw}{dz} \right] + [\mu - \theta^2(1+z^2)] w = 0, \quad (\text{IX.30}')$$

avec la condition-frontière $w(\pm \infty) = 0$ ⁽¹¹⁹⁾; ou, en divisant par $(1+z^2)$:

$$w'' + \frac{2z}{1+z^2} w' + \left(\frac{\mu}{1+z^2} - \theta^2 \right) w = 0. \quad (\text{IX.31})$$

⁽¹¹⁸⁾ Cf. WHITTAKER, E. and WATSON, G., *Modern Analysis*, 11.61 (p. 225).

⁽¹¹⁹⁾ On remarquera que la variable z n'a pas de dimensions; l'unité de longueur pour x (dimension : L) est ainsi a , distance qui sépare le sommet du haut-fond (de profondeur h_0) du point de profondeur double.

Mise sous cette forme, l'équation montre immédiatement que pour $z \rightarrow \pm \infty$, la fonction w se comporte comme $e^{-\theta z}$, ce qui assure la réalisation de la condition-frontière.

C'est pourquoi on traitera directement l'équation (IX.32) à l'aide de deux séries potentielles, l'une paire : $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} z^{2r}$, l'autre impaire : $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1} z^{2r+1}$, sans plus s'occuper de la réalisation de la condition-frontière.

a) Posons donc $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r} z^{2r}$, on obtient l'équation aux valeurs propres :

$$\mu - \theta^2 + \frac{1.2 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 2.3} + \frac{3.4 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 4.5} + \frac{5.6 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 6.7} + \dots = 0, \quad (\text{IX.32})$$

et l'on vérifie facilement que le rayon de convergence de la série est infini.

Il ne reste plus qu'à résoudre l'équation-fraction continue; pour cela, il faut se choisir un ordre de grandeur pour θ^2 , c'est-à-dire se donner r (nombre de nœuds transversaux) et b_0 (largeur du canal, tout naturellement mesurée en unités a , cf. note 119). A titre d'exemple, prenons $\theta^2 = 1$, avec $r = 1$ et $b_0 = \pi a$: on a bien alors $\theta^2 \equiv r^2 \pi^2 a^2 / b_0^2$; si θ^2 devient très grand, l'équation (IX.32) n'admettra que des racines < 0 , irrecevables. Avec $\theta^2 = 1$, la plus basse racine est $\mu = 0,6810$ (fraction arrêtée à la 6^e réduite), c'est-à-dire :

$$T = \frac{7,614 a}{\sqrt{gh_0}}.$$

b) Prenons ensuite $w(z) = \sum_{r=0}^{\infty} b_{2r+1} z^{2r+1}$. On trouve de même :

$$(\mu - \theta^2) + 1.2 + \frac{2.3 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 3.4} + \frac{4.5 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 5.6} + \frac{6.7 \theta^2}{(\mu - \theta^2) + 7.8} + \dots = 0. \quad (\text{IX.33})$$

Reprenons la valeur adoptée pour θ^2 au premier cas : $\theta^2 = 1$. On voit qu'il n'existe pas de racine positive μ . Si l'on veut retrouver une racine positive μ , il faudra prendre θ^2 plus grand, ce qu'on peut faire soit en réduisant la largeur du lac b_0 (mesurée en unités a), soit en considérant une seiche latérale à plusieurs nœuds, c'est-à-dire (dans un cas comme dans l'autre) en diminuant la longueur d'onde des oscillations transversales. Prenons encore $\theta^2 = 4$ (largeur divisée par 2, ou bien largeur inchangée et seiche binodale) : il n'y aura pas davantage de racine positive μ .

Si l'on prend $\theta^2 = 5$ (c'est-à-dire largeur divisée par $\sqrt{5}$), on trouve comme plus petite racine positive : $\mu = 0,177$ (fraction arrêtée à la 6^e réduite), c'est-à-dire

$$T = \frac{14,935 a}{\sqrt{gh_0}}.$$

A titre de comparaison, calculons, pour la même valeur de θ^2 , la plus basse racine de l'équation (IX.32); on trouve, en arrêtant également la fraction à la 6^e réduite, $\mu = 3,620$, d'où

$$T = \frac{3,302 a}{\sqrt{gh_0}}.$$

Le rapport des deux périodes,

$$\frac{14,935}{3,302} \simeq 4,523$$

est supérieur à celui des deux plus longues périodes trouvées par K. HIDAOKA pour le haut-fond hyperbolique (cf. p. 290) :

$$\frac{9,325}{3,241} \simeq 2,677,$$

et à celui des deux plus longues périodes trouvées ci-dessus pour le haut-fond parabolique :

$$\frac{34,98}{9,214} \simeq 3,796.$$

§ 5. LES SEICHES DE DÉTROITS.

La possibilité de seiches dans un détroit constitué par deux caps rectangulaires de même « largeur » (fig. 76) fut envisagée pour la première fois vers 1901 par R. A. HARRIS ⁽¹²⁰⁾. Considérons d'abord le cas du bassin rectangulaire entièrement fermé. On sait (cf. chap. I) que son oscillation aura une période telle que si l'on considère une onde progressant parallèlement à un des côtés, sa vitesse de propagation sera \sqrt{gh} ; si cette onde progressive se propage, après réflexion, en sens inverse, et se superpose à l'onde incidente, on obtiendra, moyennant une longueur convenable du bassin ($= k\Lambda/2$, Λ étant la longueur d'onde de l'oscillation et k un entier positif quelconque), un système d'ondes stationnaires.

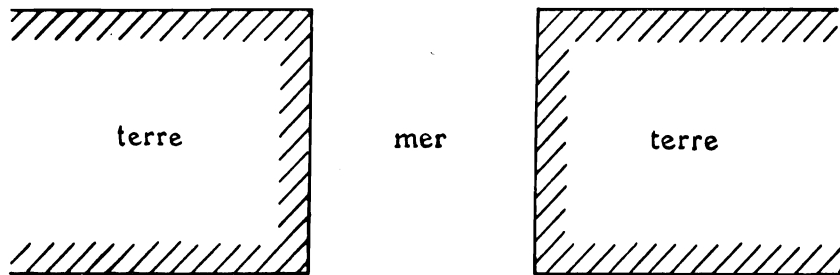


FIG. 76.

L'expérience montre que si l'on supprime les deux parois latérales, il y aura encore une oscillation propre de même période, la partie agitée s'étendant un peu au-dehors, à la condition toutefois que les murs terminaux aient une largeur au moins égale à $\Lambda/4$.

K. HIDAOKA ⁽¹²¹⁾ a repris la question d'un point de vue théorique; il montre la

⁽¹²⁰⁾ HARRIS, R. A., *Manual of Tides*, cité par POINCARÉ, H., *Leçons de Mécanique Céleste*, III, p. 348 (chap. XIV, Théorie des Marées).

⁽¹²¹⁾ HIDAOKA, K., *Seiches in a Channel*, Mem. Imp. Mar. Obs., Kobe, V, 4 (1935), pp. 327-358.

possibilité d'apparition de seiches dans un détroit, dont les deux côtes opposées sont constituées par les deux branches d'une hyperbole, et calcule quelques valeurs propres; l'application de cette théorie au cas du détroit d'Akasi (au sud-ouest de Kobé, Japon), de forme approximativement hyperbolique, fournit cependant un résultat décevant : période fondamentale calculée : 5 min 30 sec, alors que la période fondamentale observée dépasse un peu les dix minutes.

L'équation en ζ à deux dimensions, à profondeur constante h_0 :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial y^2} + \frac{\lambda}{h_0} \zeta = 0,$$

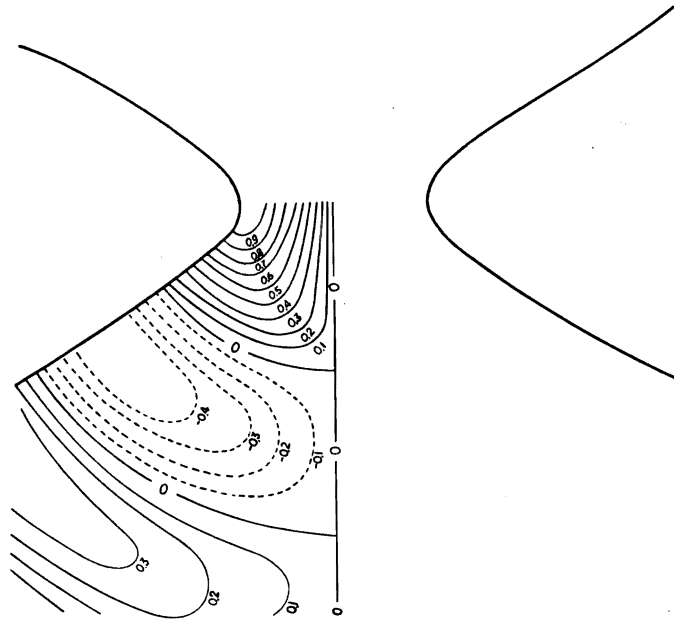


FIG. 77. — Détroit hyperbolique ($\nu_0 = 30^\circ$).

Distribution des amplitudes de la seiche $\zeta = c e_1(\nu, \theta) C e_1(\mu, \theta)$.

[D'après K. HIDAOKA, Mem. Imper. Mar. Obs., V, 4 (1935), pp. 327 sqq.]

devient, en coordonnées elliptiques définies par $x = a \cosh \mu \cos \nu$, $y = a \sinh \mu \sin \nu$ (les champs des variables μ, ν étant $0 \leq \mu < \infty$, $-\pi \leq \nu \leq +\pi$) :

$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \mu^2} + \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \nu^2} + 2\theta (\cosh 2\mu - \cos 2\nu) \zeta = 0, \quad (\text{IX.34})$$

où l'on a posé

$$\frac{\lambda a^2}{4 h_0} = \theta.$$

La condition-frontière $\partial \zeta / \partial n = 0$ sur les côtes ($n =$ normale extérieure) devient (l'équation de l'hyperbole étant $\nu = \nu_0$, la distance entre les deux foyers étant donnée par $2a$) :

$$\left(\frac{\partial \zeta}{\partial \nu} \right)_{\nu=\nu_0} = 0. \quad (\text{IX.35})$$

L'équation (IX.34) admet les solutions particulières

$$\left. \begin{aligned} \zeta &= A_r ce_r(\nu, \theta) Ce_r(\mu, \theta), \\ \zeta &= B_r se_r(\nu, \theta) Se_r(\mu, \theta), \end{aligned} \right\} r = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (\text{IX.36})$$

où les A_r et B_r sont des constantes et $Ce_r(\mu, \theta)$ et $Se_r(\mu, \theta)$ des fonctions que K. HIDAOKA appelle les fonctions « associées » ou « modifiées » de MATHIEU; en réalité ce sont des fonctions de MATHIEU à argument imaginaire :

$$Ce_r(\mu, \theta) = ce_r(i\mu, \theta); \quad Se_r(\mu, \theta) = se_r(i\mu, \theta).$$

Elles sont quasi périodiques et d'amplitude décroissante (cf. pp. 283 sqq.). Introduisant (IX.36) dans (IX.35), on obtient

$$ce'_r(\nu_0, \theta) = 0, \quad se'_r(\nu_0, \theta) = 0,$$

les dérivations étant faites par rapport à ν .

Ce sont les équations aux valeurs propres θ du problème. Elles se résolvent par tables.

L'auteur envisage trois cas principaux : $\nu_0 = 30^\circ$, $\nu_0 = 45^\circ$ et $\nu_0 = 60^\circ$. La figure ci-contre donne l'allure de la solution $Ce_1(\nu, \theta) Ce_1(\mu, \theta)$ pour $\nu = 30^\circ$. L'amplitude a été calculée en prenant arbitrairement $\zeta = 1$ en $\mu = 0$, $\nu = \nu_0$. Elle est maximum dans la partie centrale du détroit, et décroît lentement à mesure qu'on s'éloigne de celle-ci.

A mesure que la largeur du détroit croît en direction de l'océan (c'est-à-dire à mesure que ν_0 décroît), λ décroît et par suite la période croît. Les deux autres cas conduisent à des conclusions analogues.